Sommes et produits

Exercice 7.

On pourra procéder par l'absurde et utiliser l'inégalité triangulaire.

Exercice 9.

On essayera, dans les trois cas, de reconnaître une somme télescopique.

Exercice 14.

On pourra trouver une factorisation de la forme $(2n+1)^4+4 = (4n^2+1)(\alpha n^2+\beta n+\gamma)$, par exemple à l'aide de l'*identité de Sophie Germain* $\forall x \in \mathbb{R}, x^4+4 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

Exercice 17.

1. L'une des deux façons est claire : on peut remarquer que les $n+1$ premiers termes de la somme S_{n+1} constituent la somme S_n, ce qui prouve $S_{n+1} = S_n + (n+1)q^{n+1}$.

   Par ailleurs, à l'aide d'un changement de variables, on obtiendra la relation
   $$S_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n} q^{\ell+1} + qS_n.$$

Exercice 18.

On pourra commencer par linéariser les expressions $\cos^2(k\theta)$ et $\sin^2(k\theta)$.

Exercice 19.

On pourra reconnaître une somme dans le quotient $\dfrac{1-z^n}{1-z}$.

Exercice 25.

La somme se réécrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{4n} \varepsilon_k \binom{4n}{k}$, où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite 4-périodique telle que $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$ et $\varepsilon_3 = -1$.

Voyez-vous un moyen pertinent d'écrire autrement cette suite ε à l'aide de nombres complexes ?

Exercice 34.

1. On pourra chercher à comprendre le résultat sur le triangle de Pascal.
2. Pour le deuxième calcul, on prendra son courage à deux mains et on exprimera k^3 en fonction (entre autres) de $\dbinom{k}{3}$.

Exercice 39.

Pour la première question, on fera un dessin d'une « grille » $(n+1)\times(n+1)$ pour comprendre ce qu'il se passe.

Exercice 40.
Pour la deuxième question, on pourra écrire $(2n)! = 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)$ et rassembler les termes par symétrie : 2 avec $2n$, 3 avec $2n-1$, etc.

Exercice 41.
On peut procéder par récurrence.

Exercice 44.
On pourra montrer $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, t + \dfrac{1}{t} \geqslant 2$.

Exercice 45.
Pour la première question, on peut faire un calcul exact. Pour la seconde, penser à faire une transformation d'Abel, en utilisant la suite de la première question.

Exercice 47.

1. On pourra écrire $a_i - a_j$ comme une somme télescopique.
2. On pourra penser à écrire $a_k = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_k$, aussi bizarre que cela puisse paraître.
3. Inégalité triangulaire !

Exercice 49.
L'hypothèse de croissance entraîne que, pour tous i, j, les deux différences $a_i - a_j$ et $b_i - b_j$ ont le même signe. Que faire de cette information ?

Autocorrection

Autocorrection A.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}\right) - \sum_{k=0}^{n} a_k && \text{(Chasles)} \\ &= a_{n+1}. \end{aligned}$$

   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = S_n - S_{n-1}$. Par ailleurs, on a clairement $a_0 = S_0$.
2. On a
   (i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k = S_{n+1}$;
   (ii) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k = S_{2n} - S_n$;
   (iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2a_k = 2S_n$;

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k - 1) = S_n - n - 1$;

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k - k) = S_n - \frac{n(n+1)}{2}$.

Autocorrection B.

Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, on a $\forall k \in \mathbb{N}, \cos(\varphi + k\theta) = \cos\varphi$ et $\sin(\varphi + k\theta) = \sin\varphi$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(\varphi + k\theta) = (n+1)\cos\varphi \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\sin(\varphi + k\theta) = (n+1)\sin\varphi.$$

Supposons maintenant $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{i(\varphi + k\theta)} &= e^{i\varphi}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\
&= e^{i\varphi}\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\
&= e^{i\varphi}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\
&= e^{i\varphi}e^{i\frac{n}{2}\theta}\frac{2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{2i\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\left(\varphi + \frac{n}{2}\theta\right)}
\end{aligned}$$

Donc, en prenant les parties réelle et imaginaire, il vient

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(\varphi + k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\cos\left(\varphi + \frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\sin(\varphi + k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\sin\left(\varphi + \frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Autocorrection C.

(i) On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

(ii) On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^n = 2^{-n}.$$

(iii) On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k 1^{n-k} = (4+1)^n = 5^n.$$

Autocorrection D.

On écrit $n! = \prod_{k=2}^{n} k$. Le minimum des termes $2, 3, \dots, n$ est 2, alors que le maximum est n. Ainsi, l'encadrement brutal donne :

$$2^{n-1} = \prod_{k=2}^{n} 2 \leqslant \underbrace{\prod_{k=2}^{n} k}_{=n!} \leqslant \prod_{k=2}^{n} n = n^{n-1}.$$

Autocorrection E.

1. La formule n'a pas de sens pour $k = 1$. On va montrer que l'assertion est vraie pour $k_0 = 2$.

   Soit $k \geqslant 2$. On a

   $$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2},$$

   car $k(k-1) \leqslant k^2$ et que la fonction inverse décroît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} && \text{(Chasles)} \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) && \text{(on somme les inégalités de la question 1)} \\
&\leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) && \text{(télescopage)} \\
&\leqslant 2.
\end{aligned}$$