
Sommes et produits

Généralités

Autocorrection A.



On considère deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(S_n)_{n \geq 0}$ reliées par la relation

$$\forall n \geq 0, S_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer a_n en fonction des valeurs de la suite $(S_n)_{n \geq 0}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide des valeurs de la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ les sommes suivantes :

$$(i) \sum_{k=0}^{n+1} a_k; \quad (ii) \sum_{k=n+1}^{2n} a_k; \quad (iii) \sum_{k=0}^n 2a_k; \quad (iv) \sum_{k=0}^n (a_k - 1); \quad (v) \sum_{k=0}^n (a_k - k).$$

Exercice 1.



Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

$$(i) \sum_{k=0}^n (-1)^k; \quad (iii) \sum_{k=1}^n 2k; \quad (v) \sum_{k=0}^n 2^k; \quad (vii) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k;$$

$$(ii) \sum_{k=2}^{n+1} k; \quad (iv) \sum_{k=n+1}^{2n} 2k; \quad (vi) \sum_{k=n+1}^{2n} 2^k; \quad (viii) \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}.$$

Exercice 2.



En fonction de $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $1 + i + i^2 + \dots + i^n$ et le produit $i \cdot i^2 \cdot i^3 \dots i^n$.

Exercice 3.

Soit $n \geq 1$. Calculer $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3$.

Exercice 4.

Montrer les identités suivantes.

$$(i) \forall n \geq 1, \prod_{k=1}^n (4k - 2) = \prod_{k=1}^n (n + k);$$

$$(ii) \forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 5.

Soit $n \geq 1$ et x_1, x_2, \dots, x_n des nombres réels. Pour quel $\xi \in \mathbb{R}$ a-t-on $\sum_{k=1}^n (x_k - \xi) = 0$?

Exercice 6. ✓

Soit $n > 1$ un entier. Évaluer sans calcul $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2\pi \frac{k}{n}\right)$.

Exercice 7⁺. 💡

Soit $n \geq 1$ et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} \neq 0$.

Exercice 8⁺. _____

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'entiers naturels (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$). On définit la fonction

$$S : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \sum_{k=0}^n a_k. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n \geq 0}$ pour que la fonction f soit injective (resp. surjective, bijective).

Exercice 9. 💡 ✓

Calculer $\sum_{p=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$, $\sum_{k=0}^n k k!$ et $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$.

Exercice 10. _____ ✓

Utiliser la somme télescopique $(n+1)^4 = \sum_{k=0}^n [(k+1)^4 - k^4]$ pour obtenir une formule pour $\sum_{k=0}^n k^3$.

Exercice 11. _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{2^n x}{\pi} \notin \mathbb{Z}$. Montrer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin(2^k x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2^n x)}{\sin(2^n x)}$.

Exercice 12. _____ ✓

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner des expressions simples pour les produits suivants.

- | | | | |
|--|---------------------------------|---|-------------------------------------|
| (i) $\prod_{k=-1000}^{1000} (n^2 - n)$; | (iv) $\prod_{k=n+1}^{2n} k^2$; | (vii) $\prod_{k=0}^n 2^k$; | (x) $\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k}$; |
| (ii) $\prod_{k=1}^n (2k)$; | (v) $\prod_{k=1}^n (2k+1)$; | (viii) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$; | (xi) $\prod_{k=1}^n (4k^2 - 1)$; |
| (iii) $\prod_{k=1}^n k^2$; | (vi) $\prod_{k=0}^n e^{-k}$; | (ix) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$; | (xii) $\prod_{k=1}^n (k(n+1-k))$. |

Exercice 13. _____

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (u_1 u_2 \cdots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \cdots u_n)^k.$$

Exercice 14⁺⁺. _____ 💡

Montrer par récurrence $\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (2k+1)^3}{(2k+1)^4 + 4} = (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 + 1}$.

Somme géométrique

Autocorrection B.



Soit $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\sum_{k=0}^n \cos(\varphi + k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(\varphi + k\theta)$.

Exercice 15.



Étant donné une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs strictement positives, on note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, construire une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Exercice 16.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in]1, +\infty[$, $\frac{a^n - 1}{a - 1} \leq n a^{n-1}$.

Exercice 17⁺.



Le but de cet exercice est de déterminer, de trois façons différentes, la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n k q^k,$$

pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Exprimer de deux façons différentes S_{n+1} en fonction de S_n , et en déduire la valeur de S_n .
2. Calculer $(q - 1)S_n$ et en déduire la valeur de S_n .
3. On considère la fonction

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^n x^k. \end{aligned}$$

Donner une formule pour la dérivée σ' , et en déduire la valeur de S_n .

Exercice 18.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin^2(k\theta)$.

Exercice 19.



Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que $\left| \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$.

Exercice 20.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2kx)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)x)$.
2. En déduire $\cos^2 \frac{\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{14} + \cos^2 \frac{5\pi}{14}$.

Coefficients binomiaux, binôme de Newton

Autocorrection C.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^k}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n 2^{2k} \binom{n}{k}.$$

Exercice 21.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ est un entier.

Exercice 22.

Soit $n \geq 1$. Montrer que $\sum_{\substack{k \in [0, n] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k \in [0, n] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$. Combien vaut cette somme?

Exercice 23.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos k\theta$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin k\theta$.

Exercice 24⁺.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_0 = \sum_{p=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3p}, \quad S_1 = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} \binom{n}{3p+1}, \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-2)/3 \rfloor} \binom{n}{3p+2}.$$

À l'aide des développements de $(1+1)^n$, $(1+j)^n$ et $(1+\bar{j})^n$, déterminer S_0 , S_1 et S_2 .

Exercice 25⁺.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$.

Exercice 26.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$\forall p \in [0, n], \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p} \quad \text{et} \quad \forall p \in [1, n], \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 0.$$

Exercice 27.

On rappelle que les nombres de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 1}$ sont définis par

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

Exercice 28⁺.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} (-1)^k$.

Exercice 29⁺.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $2 \binom{2p+1}{p+1} = \binom{2p+2}{p+1}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k}$.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = 2S_n$, et en déduire l'expression de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 30 (Unimodalité des coefficients binomiaux).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le sens de variation de la famille $\left(\binom{n}{k} \right)_{k=0}^n$.

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$.

Exercice 31.

Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que le produit de k entiers consécutifs est toujours divisible par $k!$.

Exercice 32 (Formule d'absorption et conséquences).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. **Formule d'absorption.** Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$, de $\sum_{k=0}^n k 2^k \binom{n}{k}$ et de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 33.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En dérivant de deux façons différentes la fonction $x \mapsto (x+1)^n$, trouver la valeur de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

2. Par une méthode analogue, calculer $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice 34⁺ (Somme de l'indice du haut, et conséquences).

1. Soit n et p des entiers tels que $n \geq p \geq 0$. Montrer la *formule de sommation de l'indice du haut* :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. Soit $n \geq 1$. Déduire de ce qui précède $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$ et $\sum_{k=0}^n k^3$.

Sommes doubles, produits doubles

Calcul

Exercice 35.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$(i) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1;$$

$$(vi) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij;$$

$$(xi) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j};$$

$$(ii) \sum_{1 \leq i, j \leq n} i;$$

$$(vii) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (j - i);$$

$$(xii) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j};$$

$$(iii) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i;$$

$$(viii) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j - i);$$

$$(xiii) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j);$$

$$(iv) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j);$$

$$(ix) \sum_{1 \leq i, j \leq n} |j - i|;$$

$$(xiv) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j);$$

$$(v) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)^2;$$

$$(x) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i};$$

$$(xv) \sum_{1 \leq i, j \leq n} 3^{i+j}.$$

Exercice 36.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression simple pour les produits suivants.

$$(i) \prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j};$$

$$(ii) \prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j;$$

$$(iii) \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij.$$

Exercice 37⁺.

Soit $n \geq 1$. Calculer $\sum_{(i,j,k) \in [1,n]^3} \min(i, \max(j, k)).$

Applications à des sommes simples

Exercice 38.

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on note $S_n^{(p)} = \sum_{i=0}^n i^p.$

1. Soit $n, p \in \mathbb{N}$.

En simplifiant de deux façons la somme $\sum_{0 \leq i < j \leq n} i^p$, montrer la *formule d'al-Haytham* (965-1039) :

$$n S_n^{(p)} - S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(p)}.$$

2. En déduire une formule pour la suite $(S_n^{(4)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 39.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n+1]^2}$ une famille de nombres. Montrer que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n+1} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} + \sum_{i=1}^n a_{i,n+1} + \sum_{j=1}^n a_{n+1,j} + a_{n+1,n+1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$. (On a donc $S_0 = 0$).

En calculant de deux façons (dont l'une utilise la question précédente) la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2.$$

Quelques inégalités**Autocorrection D.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par un encadrement grossier, montrer $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$.

Autocorrection E.

1. Trouver un entier k_0 (pas trop grand) tel que $\forall k \geq k_0, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

2. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$.

Exercice 40.

1. Montrer $\forall a, b \in \mathbb{R}, 4ab \leq (a+b)^2$.

2. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n)! \leq (n+1)^{2n-1}$.

Exercice 41 (Minoration d'Oresme).

On rappelle que l'on note $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des nombres harmoniques.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Exercice 42.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n - b_{n+1}$.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \frac{b_0}{n+1}$.

Exercice 43.

1. Montrer $\forall k \geq 2, 1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.

2. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \leq 4$.

Exercice 44⁺. 💡

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

Exercice 45⁺⁺. 💡

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 1 \pmod{2\pi}$.

1. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\right| \leq M$.
2. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 46⁺⁺. 💡

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq 1$.

On définit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_{n+1} - v_n| \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 47⁺ (Inégalité discrète de Sobolev-Gallagher). 💡

Soit $n \geq 1$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On note $V = \sum_{\ell=1}^{n-1} |a_{\ell+1} - a_\ell|$.

Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_k| \leq V + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n |a_\ell|$.

1. Montrer $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_i - a_j| \leq V$.
2. En déduire $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left|a_k - \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n a_\ell\right| \leq V$.
3. Conclure.

Exercice 48⁺. ☑

Soit $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2.$$

Exercice 49⁺⁺ (Inégalité de corrélation de Čebyšëv). 💡

Soit n un entier et $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ deux familles croissantes indexées par $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j\right).$$