Calculus

Exercice 4.

On pourra calculer les premières puissances de 2. Combien ont un chiffre ? deux ? trois ? etc.

À partir de là, vous pourrez chercher à énoncer une conjecture précise sur le nombre d'entiers n tels que 2^n ait k chiffres, et chercher à la démontrer à l'aide du logarithme décimal.

Exercice 6.

Dans les deux cas, on pourra rédiger par analyse et synthèse, pour plus de souplesse.

(i) Remarquer que $8^x = (2^x)^3$.

(ii) Si (x, y) est solution du système, on obtient facilement un système somme produit liant x et $y' = 2y$.

On ne s'alarmera pas si les solutions sont un peu pénibles.

Exercice 12.

Essayer de faire intervenir la fonction tangente hyperbolique (cela mène à des disjonctions de cas).

Exercice 13.

Comment ferait-on s'il s'agissait de (co)sinus « usuels » et pas hyperboliques ?

Exercice 19.

On pourra essayer de traduire l'énoncé en termes de la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto xe^x. \end{cases}$$

Exercice 20.

Dans les deux cas, on peut avoir envie « d'identifier » et de conclure que la réponse est oui. Cependant, rien ne justifie *a priori* cette identification. Il faut essayer d'obtenir des renseignements indirects sur a, b et c, par exemple en considérant certaines valeurs particulières de x, voire en introduisant une fonction $f_{a,b,c} : x \mapsto ae^{2x} + be^x + c$ et en étudiant ses limites, sa dérivée, ou d'autres caractéristiques.

Une fois le raisonnement fait, on verra si notre envie d'identification était justifiée.

Exercice 21.

Pour la première question, étudier la fonction.

Exercice 30.

Parmi les nombreuses fonctions dont la positivité conclurait, on pourra en choisir une dont la dérivée ne fait plus intervenir que des fonctions trigonométriques.

Exercice 35.

D'une manière ou d'une autre, il faut se ramener au cas d'égalité des (co)sinus.

Exercice 39.

Remarquer qu'on ne demande que la dérivée n-ième (et pas toutes les dérivées). Essayer d'exprimer f_{n+1} en fonction de f_n.

Exercice 40.

On pourra procéder par récurrence, en remarquant que l'expression $\cos^2(f(x)) = \cos^2(\arctan(x))$ se simplifie.

Autocorrection

Autocorrection A.

L'expression a un sens pour $x > 1$ et on a

$$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \exp\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\ \ln x\right) = \exp\left(\ln\left(\ln x\right)\right) = \ln x.$$

Autocorrection B.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} x^x = x^2 &\Leftrightarrow \exp\big(x\ \ln(x)\big) = x^2 \\ &\overset{*}{\Leftrightarrow} x\ \ln(x) = 2\ln(x) \\ &\Leftrightarrow (x-2)\ln(x) = 0 \\ &\overset{**}{\Leftrightarrow} x-2 = 0 \text{ ou } \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 1, \end{aligned}$$

où l'équivalence $\overset{*}{\Leftrightarrow}$ s'obtient en appliquant ln (dans le sens direct) et exp (dans le sens réciproque) et l'équivalence $\overset{**}{\Leftrightarrow}$ provient de la règle du produit nul.

Ainsi, les solutions sont 1 et 2.

Autocorrection C.

(a) $D = D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{2a}{x^3}\exp(-a/x^2)$;

(b) $D = D' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0 \pmod{\pi}\}$,

$$f'(x) = -\frac{(2ax+b)\sin(ax^2+bx+1)\sin x + \cos(ax^2+bx+1)\cos x}{\sin^2 x};$$

(c) $D = D' =]-\infty, -a[\cup]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) - \frac{a}{a+x}\right)\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

(d) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{\cos x\ \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$;

(e) $D = D' = \left]-\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$, $f'(x) = \left(\ln(ax+b) + \dfrac{ax}{ax+b}\right)(ax+b)^x$;

(f) $D = \mathbb{R}_+$, $D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 - \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$;

(g) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}\,x}$;

(h) $D=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$, $D'=\left]-\sqrt{2},0\right[\cup\left]0,\sqrt{2}\right[$, $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & \text{si } x>0\\ -\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & \text{si } x<0;\end{cases}$

(i) $D=]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$, $D'=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$, $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x}} & \text{si } x>0\\ -\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x}} & \text{si } x<-2;\end{cases}$

(j) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\not\equiv-\dfrac{\pi}{2}\pmod{2\pi}\right\}$, $D'=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\not\equiv\dfrac{\pi}{2}\pmod{\pi}\right\}$,

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\operatorname{signe}(\cos x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2} & \text{si } \cos x>0\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } \cos x<0;\end{cases}$$

(k) $D=D'=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\not\equiv 0\pmod{2\pi}\}$, $f'(x)=\dfrac{\sin x\,\cos^2 x\,(\cos x-3)}{(1-\cos x)^3}$;

(l) $D=D'=\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\cos\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$;

(m) $D=D'=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\not\equiv 0\pmod{\pi/2}\}$, $f'(x)=\dfrac{\sin(2x)-2(x+1)\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$;

(n) $D=D'=\mathbb{R}$, $f'(x)=(8x+20)\cos\left((2x+5)^2\right)$;

(o) $D=\mathbb{R}_-$, $D=\mathbb{R}_-^*$, $f'(x)=\dfrac{-1}{(1-x)\sqrt{-x}}$;

(p) $D=\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $D'=\left]\dfrac{1}{2},1\right[$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin x-\dfrac{\pi}{6}}}$;

(q) $D=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $D'=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right[$, $f'(x)=\dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$;

(r) $D=D'=\mathbb{R}$, $f'(x)=\operatorname{ch}(x)\sin(x)+\operatorname{sh}(x)\cos(x)$;

(s) $D=\mathbb{R}_+$, $D'=\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=\dfrac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(t) $D=D'=\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}$;

(u) $D=D'=\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=(\ln x+1)x^x$;

(v) $D=D'=]-1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\cos x}{1+x}-\sin x\,\ln(1+x)$;

(w) $D=D'=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]2\pi k,\pi+2\pi k[$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sin x}$;

(x) $D=D'=\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch}(x)^2}$;

(y) $D=[-1,0[\cup]0,1]$, $D'=]-1,0[\cup]0,1[$, $f'(x)=-\dfrac{\operatorname{ch}(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{sh}(\arcsin x)^2}$;

(z) $D=D'=\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{\cos x}{(\cos x+2)^4}+\dfrac{4\sin^2 x}{(\cos x+2)^5}$.

(α) $D=D'=\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\arctan x}$;

(β) $D=D'=\mathbb{R}$, $f'(x)=(\ln\operatorname{ch} x+x\,\operatorname{th} x)\,(\operatorname{ch} x)^x$;

(γ) $D=D'=\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2\cos(5x+1)-5x^3\sin(5x+1)$;

(δ) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{\pi n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, $f'(x) = -2x\dfrac{\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}$;

(ε) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$;

(ζ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = (3x^2+4x+3)e^{x^3+2x^2+3x+4}$;

(η) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \exp\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)$;

(θ) $D = D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{2x^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{2x}\right)} = \dfrac{2e^{1/x}}{x^2\left(e^{1/x}-1\right)^2}$;

(ι) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$, $f'(x) = -2\dfrac{x\,\cos(2x) + (x^2-2)\sin(2x)}{(x^2-2)^2}$;

(κ) $D = D' = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\pi k - \frac{\pi}{4}, \pi k + \frac{\pi}{4}\right[$, $f'(x) = -2\tan(2x)$;

(λ) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D' = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $f'(x) = \operatorname{signe}(x(x-1)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1\,; \end{cases}$

(μ) $D = [1, +\infty[$, $D' =]1, +\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(ν) $D =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$, $D' =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$;

(ξ) $D = D' =]1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x\,\ln x}$;

(ο) $D = D' =]e, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x\,\ln x\,\ln\ln x}$;

(π) $D = D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \cos x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x^2}\,\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\,\sin x$;

(ρ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x\,\sin^2 x + x^2\,\sin x\,\cos x}{\sqrt{1+x^2\sin^2 x}}$;

(σ) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $f'(x) = \dfrac{2}{\cos x}$;

(τ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x\, e^{\cos x}$;

(υ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

(φ) $D = \mathbb{R}$, $D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x < 0\,; \end{cases}$

(χ) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \{\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\,\cos x}{\sin^2 x}$;

(ψ) $D = [-1, 0[\cup]0, 1]$, $D' =]-1, 0[\cup]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{2x}{\arcsin(x^2)\sqrt{1-x^4}}$;

(ω) $D = D' = \{x \in \mathbb{R} \,|\, e^x + \sin x > 0\}$, $f'(x) = \dfrac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x}$.