Introduction aux développements limités

Calcul

Autocorrection A. ☑

Déterminer les développements limités suivants.

(i) $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x \sqrt[3]{1+x}$;
(ii) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sin(x)\ln(1+x)$;
(iii) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$;
(iv) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (e^x-1)\sin x$;
(v) $DL_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$;
(vi) $DL_2(0)$ de $x \mapsto e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}}$;
(vii) $DL_8(0)$ de $x \mapsto (\sin x)^4$;
(viii) $DL_6(0)$ de $x \mapsto \tan x$;
(ix) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$;
(x) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (\cos x)^{1/x}$;
(xi) $DL_{100}(2)$ de $x \mapsto x^4$;
(xii) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \sqrt{x}$;
(xiii) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$;
(xiv) $DL_3(1)$ de exp ;
(xv) $DL_2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ de $x \mapsto \sin(x)\cos(3x)$;
(xvi) $DL_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de $x \mapsto \sqrt{\tan x}$;
(xvii) $DL_3(1)$ de $x \mapsto \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.

Exercice 1.

1. À l'aide de la méthode générale de calcul des DL, déterminer un $DL_8(0)$ de tan.
2. Retrouver ce $DL_8(0)$ à l'aide du théorème de Taylor-Young.

   Pourquoi est-ce ici une idée raisonnable ?

Exercice 2. ☑

1. Donner le $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$.
2. Donner les $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

Exercice 3. ☑

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{x^2} \end{cases}$.
   (a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
   (b) Montrer que sa réciproque f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 de la forme
   $$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).$$
   (c) En utilisant l'égalité $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, déterminer a, b et c.
2. Suivre le même schéma pour obtenir un $DL_3(0)$ de la réciproque de $x \mapsto 2x + \sin x$.

Exercice 4.

Soit $f : x \mapsto \arctan \dfrac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}$. En commençant par calculer f', déterminer le $DL_4(0)$ de f.

Exercice 5.

Donner le $DL_{12}(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{11} \dfrac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 6.

Une fonction paire telle que $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ vérifie-t-elle $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$?

Applications

Autocorrection B.

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des fonctions suivantes, au voisinage du point donné. On précisera la limite dans le cas convergent.

(i) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\tan x - x}$ (en 0) ;

(ii) $x \mapsto \dfrac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$ (en 1) ;

(iii) $x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin^3 x}$ (en 0) ;

(iv) $x \mapsto \dfrac{x - \arctan x}{\sin^3 x}$ (en 0) ;

(v) $x \mapsto \dfrac{x^3+7x^2-8}{x^4+x^3-2}$ (en 1) ;

(vi) $x \mapsto (\cos x)^{\ln|x|}$ (en 0).

Exercice 7.

Soit $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ impaires telles que $f'(0) = g'(0) = 1$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(g(x)) - g(f(x))}{x^6}$.

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $f = \sin^n$. Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}(0)$.

Exercice 9$^+$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le $DL_n(0)$ de $x \mapsto (e^x-1)^n$, calculer, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

Exercice 10$^+$.

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)$. Montrer que $f^{(1789)}(0) = 0$.