

---

## Suites

---

### Généralités

**Autocorrection A.**


Exprimer en fonction de  $n$  le terme général des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  ou  $(u_n)_{n > 0}$  suivantes.

- |  |  |
|--|--|
| (i) $u_1 = 7$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , $u_{k+1} = -2u_k$ ;<br>(ii) $u_1 = 3$ et $\forall n \geq 2$ , $2u_n = u_{n-1}$ ;<br>(iii) $u_0 = 10$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ , $u_{p+1} - u_p = 3$ ;<br>(iv) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $u_n = \frac{u_{n-1}}{3} + 4$ ;<br>(v) $u_0 = 0$ et $\forall i \geq 0$ , $4u_{i+1} + 1 = u_i$ ;<br><br> | (vi) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+1} = \frac{-1}{2}u_n^2$ ;<br>(vii) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $u_n = u_{n-1} + n$ ;<br>(viii) $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$ ;<br>(ix) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+1} = 2u_n^2$ . |
|--|--|

**Exercice 1.**


Étudier les variations de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  ou  $(u_n)_{n > 0}$  définie par les expressions suivantes.

- |   |  |
|---|--|
| (i) $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_n = \binom{n}{p}$ (pour un certain $p \in \mathbb{N}$ );<br>(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$ ;<br>(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_n = \frac{n!}{2^n}$ ;<br><br> | (iv) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $u_n = \sum_{k=1}^n \ln k - n \ln n$ ;<br>(v) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $u_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$ ;<br>(vi) $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+1} = \frac{3u_n^2}{1+4u_n}$ . |
|---|--|

**Exercice 2<sup>++</sup>.**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle non bornée et  $C > 0$ . Montrer que  $\exists p, q \in \mathbb{N} : |u_p - u_q| > C$ .
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles non bornées et  $C > 0$ . Montrer que

$$\exists p, q \in \mathbb{N} : |u_p - u_q| > C \text{ et } |v_p - v_q| > C.$$

3. Montrer que le résultat correspondant pour trois suites est faux.

### Réurrences linéaires

**Autocorrection B.**


Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression générale de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par ses premiers termes et une relation de récurrence.

- |   |
|---|
| (i) $u_0 = 1$ , $u_1 = 1$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ .<br>(ii) $u_0 = 1$ , $u_1 = 6$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ .<br>(iii) $u_0 = 0$ , $u_1 = 0$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$ .<br>(iv) $u_0 = 2$ , $u_1 = 1$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$ .<br>(v) $u_0 = 2$ , $u_1 = 1$ , $\forall k \in \mathbb{N}$ , $u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = 0$ ;<br>(vi) $u_0 = 1$ , $u_1 = 1$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ , $2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$ ;<br>(vii) $u_0 = 1$ , $u_1 = 2$ , $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , $u_{m+1} = u_m + 3u_{m-1}$ . |
|---|

**Exercice 3.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + n$ .

1. Montrer qu'il existe une suite arithmétique  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la même relation de récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. En étudiant la suite  $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 4.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 5^n$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = u_n / 5^n$ . Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmético-géométrique ; en déduire l'expression de son terme général.
2. En déduire l'expression du terme général de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 5.**

Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les deux suites réelles définies par

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n. \end{cases}$$

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = a_n + b_n$  et  $v_n = 2a_n - b_n$ . Calculer les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. En déduire l'expression de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 6.**

On considère les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique ; en déduire l'expression de son terme général.
2. En déduire une relation de récurrence satisfaite par la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Déterminer l'expression du terme général des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 7.**

1. Déterminer toutes les suites réelles bornées  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

2. Déterminer toutes les suites réelles bornées  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 12(-1)^n.$$

**Exercice 8<sup>+</sup>.**

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(f(x)) = 6x - f(x)$  et  $\forall x > 0$ ,  $f(x) > 0$ .

**Exercice 9<sup>++</sup> (Nombres de Pisot-Vijayaraghavan).**

1. Soit  $\alpha = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$ .
- Montrer que la suite  $(\lfloor \alpha^n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients entiers.
  - En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lfloor \alpha^n \rfloor$  est de même parité que  $n$ .
2. Soit  $\beta = 3 + \sqrt{5}$ . Écrire un programme permettant de calculer rapidement les trois derniers chiffres avant la virgule de  $\beta^n$ , pour de très grandes valeurs de  $n$ . (Pour fixer les idées, disons que les calculs devraient par exemple rester faisables pour l'ordinateur avec  $n \approx 10^{1000000}$ ).
3. Après avoir identifié la propriété des réels  $\alpha$  et  $\beta$  utilisée dans les deux exercices précédents, en inventer un analogue, mettant en jeu un troisième nombre réel  $\gamma$  bien choisi.

## Convergence Calculs et opérations

**Autocorrection C.**

Étudier la convergence des suites  $(u_n)_n$  dont les termes généraux sont les suivants.

- |  |  |
|--|--|
| (i) $\frac{\cos n}{n+1};$              | (vi) $\frac{3^n + (-2)^n}{3^n - (-2)^n};$  |
| (ii) $\frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1};$     | (vii) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1};$           |
| (iii) $\frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2};$ | (viii) $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n};$  |
| (iv) $\frac{e^n + n^2}{n^4 + 1};$      | (ix) $\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n};$ |
| (v) $\frac{\ln n + 1}{n + 4};$         | (x) $\frac{n!}{n^n}.$                      |

**Autocorrection D.**

1. Peut-on déterminer la nature (convergente ou divergente) de la somme de deux suites si l'on connaît la nature des deux suites ?

On traitera tous les cas, en fournissant suivant les cas une preuve ou un contre-exemple.

2. Même question pour le produit.

**Autocorrection E.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles convergentes.

Montrer que  $(\min(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\max(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent.

**Exercice 10.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Que vaut  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \cos(2\pi n!x)^{2^m}$  ?

**Exercice 11.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente. Que peut-on dire de la suite  $(\lfloor u_n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

**Exercice 12.**

Soit  $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . Construire deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers 1 et  $+\infty$ , respectivement, telles que  $u_n^{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

**Exercice 13.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Montrer qu'il existe une suite réelle  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

**Autres théorèmes de convergence****Exercice 14 (Définition de  $\zeta(2)$ ).**

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

1. Étudier la monotonie de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
2. Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ .
3. En déduire que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

**Exercice 15.**

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}$  et  $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k}$ .

1. Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $T_{n+1} = \frac{T_n + S_n}{3}$ .
3. En déduire que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 16.**

Montrer que la suite de terme général  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}$  est convergente et préciser sa limite.

**Exercice 17.**

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Déterminer la nature de la suite  $\left( \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 18.**

Étudier la convergence des trois suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  dont les termes généraux sont les suivants.

$$(i) \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k};$$

$$(ii) \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor;$$

$$(iii) \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!.$$

**Exercice 19.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $[0, 1]$  telles que  $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ . Qu'en dire ?

**Exercice 20<sup>+</sup>.**

Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( p_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - p_k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Montrer que  $q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Exercice 21<sup>+</sup>.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Montrer que  $u_n^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Exercice 22<sup>+</sup>.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}.$$

Montrer que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Exercice 23<sup>+</sup>.**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que

$$u_n^2 + v_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Montrer que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

2. Même question sous l'hypothèse

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Exercice 24<sup>+</sup> (Irrationalité de e).**

On définit les suites

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left( u_n + \frac{1}{n n!} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

1. Montrer qu'il s'agit de deux suites adjacentes.
2. On admet que la limite de ces deux suites est e. En déduire que e est irrationnel.

**Exercice 25.**

Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies ci-dessous par leurs termes généraux sont adjacentes.

$$(i) \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k};$$

$$(ii) \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

**Exercice 26 (Critère spécial des séries alternées).**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de limite nulle. Montrer que  $\left( \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Exercice 27<sup>+</sup>.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle et  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

1. Montrer que si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors  $C_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et que  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
3. Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, alors  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 28.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Montrer  $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 29.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite à valeurs strictement positives.

1. Montrer que s'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ , alors  $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .
2. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{n}\right)^{1/n}$ .

**Exercice 30<sup>+</sup>.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites réelles et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k v_{n+1-k}.$$

Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent alors  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers le produit des limites.

**Mélange****Exercice 31.**

Montrer que toute suite d'entiers naturels convergente est stationnaire.

**Exercice 32.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante. Montrer que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [u_n, u_{n+1}] = \left[ u_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right]$ .

**Exercice 33 (Critère de D'Alembert).**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs strictement positives et  $\ell \in \mathbb{R}$  telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

1. Montrer que si  $\ell < 1$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
2. Montrer que si  $\ell > 1$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
3. Montrer que l'on ne peut rien dire si  $\ell = 1$ .

**Exercice 34<sup>++</sup>.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite positive telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ . Montrer qu'elle converge.

**Exercice 35<sup>+</sup>.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

1. On suppose  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ . Montrer que E admet un minimum.
2. On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Montrer que E admet un extremum.

**Exercice 36<sup>+</sup>.**

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Montrer

$$\sup \left\{ |u_k| \mid k \geq n \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

en n'oubliant pas de vérifier que la borne supérieure est bien définie.

**Exercice 37<sup>+</sup>.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

**Exercice 38<sup>+</sup> (Lemme sous-additif de Fekete).**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite positive *sous-additive*, c'est-à-dire telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, u_{n+m} \leq u_n + u_m.$$

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N, \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n} + \delta$ .
2. Montrer que

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \inf \left\{ \frac{u_k}{k} \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

**Suites extraites****Autocorrection F.**

Montrer que toute suite périodique non constante diverge.

**Exercice 39.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente telle que  $((-1)^n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge également. Que peut-on dire ?

**Exercice 40.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

Montrer que si  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Exercice 41.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

1. On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et admet une suite extraite convergente. Que peut-on dire de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
2. On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et admet une suite extraite majorée. Que peut-on dire de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

**Exercice 42<sup>+</sup>.**

Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$  deux suites d'entiers telles que  $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \notin \mathbb{Q}$ . Montrer que

$$|p_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad |q_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

**Exercice 43<sup>++</sup>.**

1. Soit  $W \subseteq \mathbb{R}$ . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) Tout suite décroissante à valeurs dans  $W$  stationne.
- (ii) Toute partie non vide de  $W$  possède un minimum.
- (iii) Toute suite à valeurs dans  $W$  possède une sous-suite croissante.

Quand ces propriétés sont vraies, on dit que la partie  $W$  est *bien ordonnée*.

2. Soit  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  deux parties bien ordonnées. Montrer que la somme  $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$  est bien ordonnée.

**Exercice 44 (Théorème de Bolzano-Weierstrass par le lemme des pics).**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. On définit  $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k > n, u_k < u_n\}$ .

1. Montrer que si  $E$  est infini,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une sous-suite décroissante.
2. Montrer que si  $E$  est fini,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une sous-suite croissante.
3. Déduire de ce qui précède une nouvelle preuve du *théorème de Bolzano-Weierstrass*.

**Exercice 45<sup>++</sup>.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que  $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un intervalle.

**Suites à valeurs complexes****Exercice 46.**

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_{n+1} = 3z_n - \bar{z}_n$ . Déterminer une expression explicite du terme général  $z_n$ .

**Exercice 47.**

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{4}z_n + \frac{3}{4}\bar{z}_n.$$

Étudier la convergence de  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et déterminer le cas échéant sa limite.

**Exercice 48.**

Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\cos n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sin n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
2. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent.

**Exercice 49<sup>+</sup>.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ .

Déterminer si la suite  $\left( \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k}) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et, le cas échéant, déterminer sa limite.

**Analyse asymptotique****Autocorrection G.**

Soit  $(u_n)_n$  une suite réelle. Écrire les assertions suivantes sous des formes plus simples.

- |  |  |
|--|--|
| (i) $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2}$ ;  | (iv) $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n) - \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$ ; |
| (ii) $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2 + 2n + 3}{3n^3 - n}$ ;  | (v) $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n) - \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(n)$ ;  |
| (iii) $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n + n^2}{\ln n - n^3}$ ;   | (vi) $u_n = (1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)) v_n$ ;                                |
| (vii) $u_n = \left(1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(\frac{1}{n^3} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{10}}\right)\right)$ ;                     |  |
| (viii) $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) - \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ . |  |

**Autocorrection H.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Classer les assertions suivantes de la plus forte (c'est-à-dire la plus contrainte) à la plus faible. Il peut y avoir des *ex-æquo*.

(i)  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ ;

(vi)  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$ ;

(ii)  $u_n = \exp\left(\underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)\right)$ ;

(vii)  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ ;

(iii)  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(n)$ ;

(viii)  $u_n = 1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ ;

(iv)  $u_n = 1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$ ;

(ix)  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(1)$ ;

(v)  $u_n = 1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ ;

(x)  $u_n = 1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(1)$ .

**Autocorrection I.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$  telles que  $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Montrer que  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ .

**Autocorrection J.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Y a-t-il une implication entre  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  et  $u_n = v_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$ ?

**Autocorrection K.**

Donner un équivalent simple des suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i)  $\frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 1}$ ;

(vi)  $\frac{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}{\tan \frac{\pi}{n}}$ ;

(xi)  $\frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{5(\ln n)^3 - 2n^2}$ ;

(ii)  $\frac{\ln n + n + 1}{3n^2 + 2n + 1}$ ;

(vii)  $\ln(n+2) - \ln(n+1)$ ;

(xii)  $\frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$ ;

(iii)  $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right)$ ;

(viii)  $(2n + \ln n^2)e^{-(n+1)}$ ;

(xiii)  $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$ ;

(iv)  $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ;

(ix)  $\frac{\ln(n^2 + 1)}{n+1}$ ;

(xiv)  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ;

(v)  $\sin \sin \frac{\pi}{n^2}$ ;

(x)  $\frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 - n + 1}}$ ;

(xv)  $\sqrt{\ln(n+1) - \ln(n-1)}$ .

**Exercice 50.**

Classer les suites par ordre de négligeabilité les suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i)  $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln n}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{\ln n}, \frac{1}{n \ln n}$ .

(ii)  $n, n^2, n \ln n, \sqrt{n} \ln n, \frac{n}{\ln n}, \frac{n^2}{\ln n}$ .

**Exercice 51.**

Déterminer un équivalent des suites dont les termes généraux sont les suivants.

(i)  $2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ;

(ii)  $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ .

**Exercice 52.**

Déterminer un équivalent de  $\left( \prod_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{2k-1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 53.**

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants.

$$(i) n \sqrt{\ln \left( 1 + \frac{1}{n^2 + 1} \right)};$$

$$(iv) \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}};$$

$$(ii) \left( 1 + \sin \frac{1}{n} \right)^n;$$

$$(v) n^2 ((n+1)^{1/n} - n^{1/n});$$

$$(iii) \left( n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2};$$

$$(vi) \left( 3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3} \right)^n.$$

**Exercice 54.**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $u_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$ .

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante à partir d'un certain rang, par exemple en étudiant le quotient de deux termes successifs.
3. Montrer (en utilisant la théorie de la convexité) que  $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et en déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est même croissante.

**Exercice 55<sup>+</sup>.**

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1} \right)^n$ .

**Exercice 56.**

1. Montrer que toute suite équivalente à  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante à partir d'un certain rang.
2. Construire une suite équivalente à  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui ne soit pas croissante à partir d'un certain rang.

Même question pour  $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 57.**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

1. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .
2. En déduire la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , puis déterminer un équivalent simple de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 58.**

Montrer que  $\sum_{k=0}^n k! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$ .

**Exercice 59.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles divergeant vers  $+\infty$ .

On suppose  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ .

Montrer qu'il existe une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n)$  et  $w_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ .

**Exercice 60.**

Montrer qu'il existe deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n)$  sans que  $v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(u_n)$  ou  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ .

**Exercice 61<sup>+</sup>.**

Soit  $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  deux suites divergeant vers  $+\infty$ . Montrer que la condition

$$\forall A > 0, u_n - Av_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

équivaut à  $v_n = o(u_n)$ .

**Exercice 62.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Déterminer, en justifiant, si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse.

- (i) Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors  $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n}$ .
- (ii)  $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n}$  si et seulement si  $u_n - v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$
- (iii) Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  et  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang, alors  $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$ .
- (iv) Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors  $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$ .

**Exercice 63.**

Soit  $u$  une suite décroissante telle que  $u_n + u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ . Déterminer un équivalent simple de  $u$ .

**Exercice 64.**

On note  $\pi$  la fonction de comptage des nombres premiers (c'est-à-dire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\pi(x)$  est le nombre de nombres premiers  $\leq x$  – par exemple,  $\pi(\sqrt{10}) = 2$ ) et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite des nombres premiers.

1. On admet le *théorème des nombres premiers* :  $\pi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$ .

Donner un équivalent de  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

2. On admet maintenant  $\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$ .

Donner un DA à trois termes de  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 65<sup>+</sup>.**

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite telle que  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ . Montrer  $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

## Études de suites récurrentes et implicites

### Suites récurrentes

**Autocorrection L.**

Étudier la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$ .

**Autocorrection M.**

Étudier la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = -\frac{1}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ .

**Exercice 66.**

Étudier la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$ .

**Exercice 67 (Méthode de Héron).**

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $u_0 > 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right)$ .

1. Étudier la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right) \end{cases}$ . Montrer que pour tout  $x \geq \sqrt{a}$ , on a  $f(x) \leq x$ .
2. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \sqrt{a}$  et que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.
3. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 68.**

On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation de récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e \ln(u_n)$ .

1. Étudier la nature de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans le cas où  $u_0 \geq e$ .
2. Que dire si  $u_0 < e$  ?

**Exercice 69.**

Soit  $f : \begin{cases} ]-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{2-x} \end{cases}$ .

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in ]-\infty, 2]$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Pour quelles valeurs de  $u_0$  la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle bien définie ?
2. On suppose que  $u_0$  a une telle valeur.

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 70.**

Étudier la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$ .

**Exercice 71<sup>+</sup>.**

Étudier la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 2.$$

**Couples de suites****Exercice 72 (Moyenne arithmético-géométrique).**

Soit  $a > b \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites définies par  $u_0 = a, v_0 = b$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  et  $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ . Montrer que ces deux suites sont bien définies et qu'elles sont adjacentes.

(La limite commune de ces deux suites est, par définition, la *moyenne arithmético-géométrique* des deux nombres  $a$  et  $b$ .)

**Exercice 73.**

Soit  $x > 1$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites définies par  $u_0 = x, v_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  et  $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bien définies, qu'elles sont adjacentes et calculer leur limite commune.

## Suites implicites

### Exercice 74.



1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'équation  $x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1$  possède une unique solution dans  $\mathbb{R}_+$ . On la note  $x_n$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $1/2 \leq x_n \leq 1$ .
3. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.
4. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 75.



Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^5 + nx - 1 \end{cases}$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique réel  $u_n$  tel que  $f_n(u_n) = 0$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ainsi définie est décroissante.
3. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge, puis que sa limite est 0.

## Asymptotique

### Exercice 76.



Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$ .

1. Montrer que  $u$  est à valeurs  $> 0$  et converge vers 0.
2. Montrer que  $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{3}$ , et obtenir un équivalent de  $u$ .

### Exercice 77.



Soit  $u$  une suite vérifiant  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ . En déterminer un équivalent.

### Exercice 78<sup>+</sup>.

Mines

On définit la suite  $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  par  $x_0 > 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\ln x_n}$ . En déterminer un équivalent.

### Exercice 79.

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme unitaire, de degré 3, possédant trois racines distinctes  $a, b$  et  $c$ . Exprimer les coefficients de  $P$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P_n = X^3 - (n+2)X^2 + (2n+1)X - 1 \in \mathbb{R}[X]$ .

2. Montrer que, pour  $n$  assez grand,  $P_n$  possède trois racines  $a_n, b_n$  et  $c_n$  vérifiant

$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n.$$

3. Déterminer des équivalents simples des suites  $a, b$  et  $c$  ainsi définies.

### Exercice 80.



Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique réel  $u_n$  tel que  $f_n(u_n) = 0$ , et que  $u_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ .
2. Montrer que  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .
3. Donner un équivalent simple de  $\left(\frac{1}{n} - u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 81.**

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique nombre réel  $x_n$  tel que  $x_n + \sqrt[3]{x_n} = n$ .
2. Déterminer la limite, puis un équivalent simple de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 3<sup>+</sup>. Donner un développement asymptotique à trois termes de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 82.**

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $x + \ln x = n$  possède une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$ , que l'on notera  $u_n$ .
2. Déterminer la limite, puis un équivalent simple de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- 3<sup>+</sup>. Obtenir le développement asymptotique  $u_n = n - \ln n + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n \rightarrow \infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ .

**Exercice 83<sup>+</sup>.**

1. Montrer que, pour tout entier  $n \geq 3$ , il existe exactement deux solutions positives  $0 < x_n < y_n$  à l'équation  $t^n e^{-t} = 1$ .
2. Donner la limite, puis un développement asymptotique à deux termes de la suite  $(y_n)_{n \geq 3}$ .
3. Donner la limite, puis un développement asymptotique à deux termes de la suite  $(x_n)_{n \geq 3}$ .
- 4<sup>++</sup>. Pousser un peu plus les développements asymptotiques précédents. Disons, quatre termes ?

**Exercice 84<sup>++</sup>.**

1. Montrer qu'il existe un unique  $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $\tan(x_n) = \sqrt{x_n}$ .
2. Déterminer la limite, puis un équivalent simple de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Obtenir un développement asymptotique à quatre termes de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .