
Dimension

Exercice 8.

1. On peut essayer de singer la preuve vue en cours pour le cardinal d'une union, mais il est plus facile d'utiliser directement cette formule (plusieurs fois), en se souvenant que l'intersection est distributive sur l'union :

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(\Omega), (X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z).$$

2. La réponse est non. Comment trouver un contre-exemple ?

Exercice 10.

On commencera avec profit à étudier les cas de petite dimension en cherchant à analyser la dimension géométriquement : dans un plan, quelles sont les dimensions possibles pour l'intersection de deux droites ? dans l'espace, quelles sont les dimensions possibles pour l'intersection de deux droites ? de deux plans ? d'une droite et d'un plan ?

Exercice 13.

En dimension finie, le cours permet de conclure rapidement. En revanche, il faut le faire à la main en dimension infinie. Les projecteurs peuvent aider !

Exercice 18.

On commencera par reformuler la question en un énoncé du type « montrer que l'application linéaire $\varphi : K_p[X] \rightarrow K_q[X]$ est surjective », pour certaines valeurs de p, q et une application linéaire φ bien choisie.

Exercice 20.

Dans chacun des deux cas, on pourra montrer que u induit une application linéaire entre un sous-espace vectoriel de E et un sous-espace vectoriel de F pertinents, et appliquer le théorème du rang à cette application induite.

Exercice 22.

On pourra remarquer que l'assertion (ii) implique clairement les deux autres.

Pour l'implication (iii) \Rightarrow (ii), on pourra commencer par montrer que si p est un projecteur, l'espace propre $E_2(p) := \ker(p - 2 \text{id}_E)$ est réduit à l'espace nul, et chercher à utiliser ce résultat pour montrer $p \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 24.

On pourra utiliser un théorème du cours pour définir w sur la décomposition en somme directe $F = \text{im } u \oplus T$ (en constatant que la définition sur T n'a à vrai dire guère d'importance).

Exercice 36.

Pour la question 1(a), écrire une application linéaire $E \rightarrow K^c$ dont $\bigcap_{i=1}^c H_i$ est le noyau.

Pour la question 1(c), utiliser une base adaptée à F .

Pour la question 3, on pourra remarquer que si $V = \bigcap_{i=1}^c \ker(\beta_i)$ a été écrit comme une intersection d'hyperplans, correspondant à des formes linéaires $\beta_i : F \rightarrow K$, alors $f^{-1}[V] = \bigcap_{i=1}^c \ker(\alpha_i)$, pour certaines formes linéaires $\beta_i : E \rightarrow K$ (et il n'y a pas mille façons d'en définir...).

Exercice 37.

On pourra commencer par donner des *équations* pour F , c'est-à-dire à écrire F comme l'intersection de noyaux de formes linéaires $f_1, \dots, f_r : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 39.

La dimension de \mathcal{P}_T est T . On peut essayer de le démontrer en explicitant une base à T éléments de \mathcal{P}_T ou en explicitant un isomorphisme $\varphi : \mathcal{P}_T \rightarrow \mathbb{R}^T$. Dans les deux cas, comprendre ce qui se passe dans les « petits » cas ($T = 2, T = 3$, etc.) est une bonne idée.

Pour la troisième question, on pourra se rafraîchir la mémoire en calculant $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_T} \omega^p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 45.

Il est peut-être plus simple de traiter le cas général : étant donné un espace vectoriel de dimension finie V et une symétrie $s \in \mathcal{L}(V)$, quelle est la dimension de $\{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ s = s \circ u\}$? Dans notre cas, on pourra construire un isomorphisme entre l'espace de l'exercice et $\mathcal{L}(S_n(\mathbb{R})) \times \mathcal{L}(A_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 49.

On pourra penser à introduire une application linéaire adaptée (par exemple, une application linéaire dont la non-injectivité fournirait un triplet (λ, μ, ν) tel que celui demandé par l'énoncé).

Exercice 50.

Une démonstration très rapide passe par la considération d'une certaine application linéaire

$$\text{Vect}(f_1, \dots, f_n) \rightarrow \text{Vect}(f'_1, \dots, f'_n).$$

Autocorrection

Autocorrection A.

Notons

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

et les sous-espaces vectoriels

$$V = \text{Vect}(u, v, w) \quad \text{et} \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y + z = 0 \right\}.$$

1. On vérifie par résolution d'un système linéaire (ou à l'œil nu) que la famille (u, v, w) est liée.

Par exemple, on a la relation de liaison non triviale $u + v - w = 0$, ce qui montre que

$$V = \text{Vect}(u, v).$$

Comme les deux vecteurs restants ne sont pas colinéaires, (u, v) est une base de V .

2. On vérifie directement que $u, v \in H$, ce qui prouve que $V = \text{Vect}(u, v) \subseteq H$ par stabilité par combinaison linéaire. En considérant les dimensions, on a les inégalités

$$2 = \dim V \leq \dim H \leq \dim \mathbb{K}^3 = 3.$$

Enfin, $H \neq \mathbb{K}^3$ (par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin H$), donc $\dim H \neq 3$. Cela montre $\dim H = 2$, et l'inclusion $V \subseteq H$ est alors une égalité par inclusion et égalité des dimensions.

Autocorrection B.

1. Les ensembles D_t et P_t sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 , puisqu'ils sont définis comme des sous-espaces vectoriels engendrés par des familles de vecteurs.

La famille (à un vecteur) engendrant D_t est libre, puisque le seul vecteur qui la compose est non nul. Elle en constitue donc une base, ce qui montre $\dim D_t = 1$.

La famille (à deux vecteurs) engendrant P_t est libre, puisque les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires (s'ils l'étaient, leurs cotes étant égales et non nulles, ils seraient égaux, ce qui contredit le fait que leurs abscisses ne soient pas égales). Elle en constitue donc une base, ce qui montre $\dim P_t = 2$.

2. Puisque $\dim D_t + \dim P_t = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on a l'équivalence

$$D_t \oplus P_t = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow D_t \cap P_t = \{0\}.$$

Comme $D_t \cap P_t$ est un sous-espace vectoriel de D_t , de dimension 1, sa dimension est 0 ou 1. Plus précisément, soit sa dimension est 0, et l'on a $D_t \cap P_t = \{0\}$ et la supplémentarité des deux sous-espaces vectoriels, soit sa dimension est 1 et l'on a $D_t \cap P_t = D_t$ par inclusion et égalité des dimensions, et donc $D_t \subseteq P_t$.

Comme $D_t = \text{Vect} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$, la condition $D_t \subseteq P_t$ est en fait équivalente à la condition plus simple

$\begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \in P_t$ (c'est évident dans le sens direct, et cela provient de la stabilité par combinaison linéaire dans le sens réciproque).

On a alors la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \in P_t &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \text{le système } \begin{cases} \lambda + 2\mu = t \\ t\lambda + \mu = t \\ \lambda + \mu = 1, \end{cases} \text{ d'inconnues } \lambda, \mu, \text{ est compatible.} \end{aligned}$$

Après un calcul soigné, on obtient que ce système n'est compatible que si $t = 1$.

En résumé,

- ▶ Si $t = 1$, le vecteur $\begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $P_t = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (de fait, c'est évident dans ce cas), donc $D_t \subseteq P_t$ par stabilité par combinaison linéaire.

On a donc $D_t \cap P_t = D_t \neq \{0\}$ et les sous-espaces vectoriels D_t et P_t ne sont pas supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

- ▶ Si $t \neq 1$, on a $\begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \notin P_t$ donc $D_t \not\subseteq P_t$.

Ainsi, $\dim(D_t \cap P_t) < \dim D_t$ (si on avait égalité, on aurait $D_t \cap P_t = D_t$ par inclusion et égalité des dimensions, ce qui entraînerait $D_t \subseteq P_t$).

Comme $\dim D_t = 1$, il vient que $\dim(D_t \cap P_t) = 0$, donc $D_t \cap P_t = \{0\}$: les espaces D_t et P_t sont en somme directe.

Puisque $\dim D_t + \dim P_t = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il s'ensuit que $D_t \oplus P_t = \mathbb{R}^3$.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc $t \neq 1$.

Autocorrection C.

1. Faisons-le pour \mathcal{P} , le cas de \mathcal{J} étant essentiellement le même.

- ▶ Déjà, on a $0 \in \mathcal{P}$.
- ▶ Soit $Q, R \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in K$. On a alors

$$\begin{aligned} (\lambda Q + R)(-X) &= \lambda Q(-X) + R(-X) \\ &= \lambda Q(X) + R(X) && \text{(car } Q, R \in \mathcal{P}) \\ &= (\lambda Q + R)(X), \end{aligned}$$

donc $\lambda Q + R \in \mathcal{P}$.

Donc \mathcal{P} est un sous-espace vectoriel de $K_{2n}[X]$.

2. Soit $Q \in \mathcal{P} \cap \mathcal{J}$. On a alors $Q(-X) = Q(X)$ car $Q \in \mathcal{P}$ et $Q(-X) = -Q(X)$ car $Q \in \mathcal{J}$.

On en déduit $Q(X) = -Q(X)$, donc $Q = 0$.

L'autre inclusion étant automatique, on a montré $\mathcal{P} \cap \mathcal{J} = \{0\}$ et donc que \mathcal{P} et \mathcal{J} sont en somme directe.

3. On constate directement que

$$X^0, X^2, \dots, X^{2n} \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad X^1, X^3, \dots, X^{2n-1} \in \mathcal{J}.$$

Par ailleurs, les deux familles $(X^0, X^2, \dots, X^{2n})$ et $(X^1, X^3, \dots, X^{2n-1})$ sont libres. Pour montrer cela, (au moins) deux arguments sont possibles :

- ▶ ces familles sont des sous-familles de la base canonique, donc elles sont libres ;
- ▶ ces familles sont des familles échelonnées de polynômes non nuls, donc elles sont libres.

Comme la première famille a $n + 1$ vecteurs, on en déduit $\dim \mathcal{P} \geq n + 1$. Comme la deuxième famille a n vecteurs, on en déduit $\dim \mathcal{J} \geq n$.

4. D'après la formule de Grassmann, comme \mathcal{P} et \mathcal{J} sont en somme directe,

$$\dim(\mathcal{P} \oplus \mathcal{J}) = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{J} \geq n + 1 + n.$$

Or, $\mathcal{P} \oplus \mathcal{J}$ est un sous-espace vectoriel de $K_{2n}[X]$, qui est de dimension $2n + 1$.

Cela entraîne $\dim(\mathcal{P} \oplus \mathcal{J}) \leq 2n + 1$.

On en déduit que $\dim(\mathcal{P} \oplus \mathcal{J}) = 2n + 1$. Les inégalités du raisonnement précédent sont donc des égalités : on a $\dim \mathcal{P} = n + 1$ et $\dim \mathcal{J} = n$.

Par ailleurs, $\mathcal{P} \oplus \mathcal{J} = K_{2n}[X]$ par inclusion et égalité des dimensions.

Enfin, comme $(X^0, X^2, \dots, X^{2n})$ a $n + 1 = \dim \mathcal{P}$ vecteurs et est une famille libre d'éléments de \mathcal{P} , on en déduit que c'est une base de \mathcal{P} . De même, $(X^1, X^3, \dots, X^{2n-1})$ a $n = \dim \mathcal{J}$ vecteurs et est une famille libre d'éléments de \mathcal{J} , c'est une base de \mathcal{J} .

Autocorrection D.

1. Le plus rapide est de constater que f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. En résolvant le système (déjà échelonné et réduit!) $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$, on obtient

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ t \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid z, t \in K \right\} \\ &= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z, t \in K \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Comme les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, la famille qu'ils forment est libre.

Puisqu'elle engendre $\ker f$ d'après le calcul qui précède, elle en est une base, ce qui montre que $\dim \ker f = 2$.

3. D'après la formule du rang, on a

$$\text{rg } f = \dim K^4 - \dim \ker f = 4 - 2 = 2 = \dim K^2,$$

ce qui montre que f est surjective.

4. On a $G = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de K^4 .

Pour déterminer la dimension de G , il est loisible d'appliquer le théorème du rang, mais on peut simplement constater après résolution du système (échelonné réduit!) le définissant que

$$G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, G est engendré par une sous-famille à deux éléments de la base canonique (qui est libre, soit par non-colinéarité, soit en tant que sous-famille d'une base), donc $\dim G = 2$.

5. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker f \cap G$. On a alors

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = 0 \\ y - t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} [L_1 \leftarrow L_1 + L_4] \\ \text{puis} \\ [L_2 \leftarrow L_2 - L_3] \end{array}$$

donc $x = y = z = t = 0$,

ce qui démontre que G et $\ker f$ sont en somme directe.

Puisque $\dim G + \dim \ker f = 2 + 2 = 4 = \dim K^4$, on en déduit que

$$G \oplus \ker f = K^4,$$

ce qui conclut.