
Intégration

Exercice 2.

Pour la deuxième question, on pourra s'intéresser à $I + J$...

Exercice 17.

Pour les deux premières questions, on peut s'appuyer sur la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$. Pour la dernière, il faut trouver une autre fonction rationnelle...

Exercice 28.

On cherchera à appliquer la stricte positivité de l'intégrale à une fonction très judicieusement choisie (en fonction de l'objectif).

Exercice 29.

On pourra commencer par généraliser : si l'inégalité demandée est vraie, étant donné $f \in C^0([0, 1])$ (sans hypothèse sur l'intégrale), quelle inégalité obtiendrait-on entre $\int_0^1 f^2$, $\int_0^1 f$, $\min f$ et $\max f$?

Ce résultat généralisé est peut-être plus facile à démontrer !

Exercice 31.

On cherchera à exprimer l'hypothèse en fonction d'une primitive de f .

Exercice 33.

Pour les trois premières questions, on pourra chercher à faire apparaître la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ (et faire quelque chose de comparable pour la dernière).

Exercice 41.

On pourra tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1+t^2}{2}$ et chercher à l'encadrer entre deux fonctions affines judicieuses.

Exercice 42.

Pour la deuxième intégrale, on pourra s'intéresser aux comportements possibles de

$$F : x \mapsto \int_0^x \sin^2(t) \arctan(t) dt$$

au voisinage de $+\infty$, et notamment à la suite $(F(2\pi n + \alpha) - F(2\pi n + \beta))_{n \in \mathbb{N}}$ pour un choix judicieux de α et β .

Exercice 52.

Dans la première question, on ne cherchera pas à calculer l'intégrale, mais on utilisera l'inégalité triangulaire.

Exercice 62.

1. Il s'agit de reconnaître que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est le carré d'une somme de Riemann.
2. On somme « en gros » la moitié des termes apparaissant dans la suite précédente et ces termes présentent une symétrie $k \leftrightarrow \ell$. Il faut essayer d'exploiter concrètement cette remarque.

Exercice 68.

La formule de Taylor-Young peut suffire, au prix d'une démonstration epsilonesque (pas question de sommer n développements limités à la diable). Les formules de Taylor globales peuvent donner une démonstration plus directe.

Exercice 72.

Dans la première question, on pourra raisonner à partir d'un point où f s'annule, dont on montrera l'existence.

Exercice 77.

On pourra montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2 + k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{n^2 + t^2} \leq \frac{1}{n^2 + (k-1)^2}$.

Exercice 82.

Poser $g : x \mapsto x f'(x) + f(x)$ et résoudre l'équation différentielle $x y' + y = g(x)$. Elle n'est pas résolue mais ça n'est pas un gros problème, car on est capable de montrer que la fonction $\bar{g} : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$ se prolonge par continuité en 0 (pourquoi?).

Autocorrection

Autocorrection A.

(Pour gagner de la place, on omet abusivement les $x \mapsto$ en tête des expressions).

- | | |
|--|---|
| (i) $-\frac{1}{4}e^{-2x^2} + \kappa;$ | (xi) $\ln \sin x + \kappa;$ |
| (ii) $\frac{(\ln x)^2}{2} + \kappa;$ | (xii) $\frac{1}{3} \ln 1 + x^3 + \kappa;$ |
| (iii) $-\arctan(\cos x) + \kappa;$ | (xiii) $-\ln(1 + \cos^2 x) + \kappa;$ |
| (iv) $\sin(\ln x) + \kappa;$ | (xiv) $2\sqrt{\tan x} + \kappa;$ |
| (v) $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \kappa;$ | (xv) $2 \ln(1 + \sqrt{x}) + \kappa;$ |
| (vi) $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + \kappa;$ | (xvi) $\ln x (\ln \ln x - 1) + \kappa;$ |
| (vii) $\frac{\sin^6 x}{6} + \kappa;$ | (xvii) $\exp(e^x) + \kappa;$ |
| (viii) $-\frac{1}{80} \cos(5x) + \frac{5}{48} \cos(3x) - \frac{5}{8} \cos x + \kappa;$ | (xviii) $\arctan(\ln x) + \kappa;$ |
| (ix) $\tan x - x + \kappa;$ | (xix) $2\sqrt{1 + \ln x} + \kappa;$ |
| (x) $-\frac{1}{3} \frac{1}{(\ln x)^3} + \kappa;$ | (xx) $-\frac{e^{-x}}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x) + \kappa;$ |
| | (xxi) $\frac{1}{2} (\sin x \operatorname{ch} x - \cos x \operatorname{sh} x) + \kappa.$ |

Autocorrection B.

- (i) $e - 2$ (on fait deux IPP, d'abord en dérivant $t \mapsto t^2$ et en primitivant exp, puis en dérivant $t \mapsto t$ et en primitivant exp);
- (ii) $\frac{1}{9} (2e^3 + 1)$ (on dérive ln et on primitive $t \mapsto t^2$);
- (iii) $\frac{\pi}{3}$ (on dérive $t \mapsto t$ et on primitive $t \mapsto \sin(3t)$);
- (iv) $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$ (on dérive $t \mapsto t$ et on primitive $t \mapsto \sqrt{t+1}$);
- (v) $\frac{5}{3} \ln 2 - \ln 3$ (on dérive ln et on primitive $t \mapsto \frac{1}{(t+1)^2}$);
- (vi) $\frac{1}{2}$ (on dérive $t \mapsto t^2$ et on primitive $t \mapsto t e^{t^2}$);
- (vii) $\frac{\ln 2}{4}$ (on dérive arctan et on primitive $t \mapsto \frac{1}{(t+1)^2}$; il reste une fraction rationnelle à décomposer en éléments simples, puis à intégrer);
- (viii) $\frac{\pi^2}{4} - 2$ (on dérive arcsin² et on primitive 1; dans une deuxième IPP, on primitive $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et on dérive arcsin);
- (ix) $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$ (on primitive $x \mapsto x^2$ et on dérive arctan).

Autocorrection C.

- (i) $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$ ($u = t + 1$);
- (ii) $12 - 4e$ ($x = u^2$);
- (iii) $\frac{5}{48}$ ($u = t^2$);
- (iv) $\frac{\pi}{2}$ ($x = \cos \theta$);
- (v) $2 - \frac{\pi}{2}$ ($t = e^x$ puis $t = u^2 + 1$);
- (vi) $\frac{1 + e^\pi}{2}$ ($t = e^x$, puis on intègre l'exponentielle complexe $x \mapsto e^{(1+i)x}$);
- (vii) $\frac{\pi}{6}$ ($u = \sqrt{x}$);
- (viii) $2(\ln 2)^2 - 4 \ln 2 + 2$ ($u = \ln x$);
- (ix) $\frac{\pi}{12}$ ($u = x^3$);
- (x) $\frac{\pi}{8}$ ($x = \sin \theta$ ou $x = \cos \theta$, puis linéarisation);
- (xi) $1 + \ln 2 - \ln(e + 1)$ ($u = e^x$);
- (xii) $\frac{\pi}{8}$ (on peut commencer par $x = u^4$, puis $u = \sin \theta$ s'impose...);
- (xiii) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ($u = \cos t$);
- (xiv) $\frac{7}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2}$ ($t = 1/u$; on peut aussi faire une IPP).

Autocorrection D.

- (i) $x \mapsto \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| + \kappa;$
(ii) $x \mapsto 2 \ln |x-5| - \ln |x-2| + \kappa;$
(iii) $x \mapsto x + \frac{31}{3} \ln |x-5| - \frac{7}{3} \ln |x-2| + \kappa;$
(iv) $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \kappa;$
(v) $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 4 \arctan x + \kappa;$
(vi) $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}} \right) + \kappa;$
(vii) $x \mapsto \frac{1}{3-x} + \kappa;$
(viii) $x \mapsto x - \ln \left((x+2)^2 \right) - \frac{1}{x+2} + \kappa;$
(ix) $x \mapsto \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{18} \ln |x+1| - \frac{4}{9} \ln |x-2| - \frac{1}{3} \frac{1}{x-2} + \kappa;$
(x) $x \mapsto -\frac{1}{4} \ln |x-1| + \frac{1}{4} \ln |x+1| + \frac{1}{2} \arctan x + \kappa;$
(xi) $x \mapsto -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln |x+1| + \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + \kappa;$
(xii) $x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(x^2) + \kappa$ (par la méthode brutale, $x \mapsto \frac{1}{2} \left(\arctan(\sqrt{2}x-1) - \arctan(\sqrt{2}x-1) \right) + \kappa'$, mais c'est pareil);
(xiii) $x \mapsto \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \kappa.$

Autocorrection E.

- (i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}, \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x + 3 - \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x-2}.$
(ii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\}, \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1-i}{4} \frac{1}{x-i} + \frac{1+i}{4} \frac{1}{x+i}.$
(iii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_4, \frac{x^4+1}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{i}{2} \frac{1}{x-i} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{i}{2} \frac{1}{x+i}.$
(iv) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3\}, \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$
(v) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 2, \pm i\}, \frac{10x^3}{(x^2+1)(x^2-4)} = \frac{4}{x+2} + \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}.$
(vi) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, j, j^2\}, \frac{5}{(x+1)^5 - x^5 - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \frac{1}{x-j} - \frac{\sqrt{3}i}{4} \frac{1}{x-j^2}.$

Autocorrection F.

- (i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \llbracket 0, n \rrbracket, \frac{1}{x(x-1)\cdots(x-n)} = \sum_{k=0}^n \frac{((-1)^{n-k} k! (n-k)!)^{-1}}{x-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{x-k}.$
(ii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_n, \frac{x^{n-1}}{x^n-1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{x-\omega}.$
(iii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{U}_{2n} \setminus \mathbb{U}_n), \frac{x^n-1}{x^n+1} = 1 + \frac{2}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2n} \setminus \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{x-\omega}.$

Autocorrection G.

$$(i) \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \frac{x^3}{(x-1)^3} = 1 + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)} + \frac{1}{x-1}.$$

$$(ii) \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 3\}, \frac{1}{(x+1)^2(3-x)} = -\frac{1}{16} \frac{1}{x-3} + \frac{1}{16} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x+1)^2};$$

$$(iii) \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}, \frac{1}{(x^2-1)(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{1}{8} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{8} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^3};$$

$$(iv) \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 2\}, \frac{7x^2+4x-4}{x^4-4x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2};$$

$$(v) \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}, \frac{3x-1}{x^2(x+1)^2} = \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2};$$

$$(vi) \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{2\}, \frac{x^3-1}{(x-2)^2} = x+4 + \frac{12}{x-2} + \frac{7}{(x-2)^2}.$$

Autocorrection H.

Le théorème hors-programme garantit l'existence de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \frac{x^4+x+1}{x(x^2+1)^3} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+1} + \frac{\delta x + \varepsilon}{(x^2+1)^2} + \frac{\zeta x + \eta}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^3} + \frac{1}{(x^2+1)^3}$$

(l'égalité est donc notamment valable sur \mathbb{R}^*). En utilisant l'unicité de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \begin{cases} \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^3} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x}{x^2+1} + \frac{\delta x}{(x^2+1)^2} + \frac{\zeta x}{(x^2+1)^3} \\ \frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{\gamma}{x^2+1} + \frac{\varepsilon}{(x^2+1)^2} + \frac{\eta}{(x^2+1)^3}. \end{cases}$$

Coup de chance, la partie paire est déjà un élément simple, donc on a $\gamma = \varepsilon = 0$ et $\eta = 1$.

On utilise alors les techniques classiques sur la première décomposition en éléments simples.

► En « chassant » le x au dénominateur puis en prenant la limite en 0 , $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+1}{(x^2+1)^3} = 1$.

► En « chassant » le $(x^2+1)^3$ au dénominateur puis en prenant la limite en i (*whatever it means*), il vient $\zeta i = \lim_{x \rightarrow i} \frac{x^4+1}{x}$, c'est-à-dire $\zeta i = \frac{2}{i}$, c'est-à-dire $\zeta = -2$.

► En considérant la limite de $x \mapsto xf(x)$ en $+\infty$, il vient $1 + \beta = 0$, c'est-à-dire $\beta = -1$.

À ce stade, on a

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{\delta x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{(x^2+1)^3}.$$

En évaluant en 1 (par exemple), on obtient la valeur manquante $\delta = 0$.

In fine, on obtient la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \frac{x^4+x+1}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1-2x}{(x^2+1)^3}.$$

Ça aurait pu être pire!

Autocorrection I.

D'après le théorème fondamental, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe C^1 , et $F' = f$. En particulier, elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$, ce qui donne

$$f(c) = F'(c) = \frac{1}{b - a} (F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0}) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt.$$

Autocorrection J.

La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en 0.

La fonction de l'énoncé, qui est $x \mapsto \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x}$ converge donc vers $F'(0) = f(0)$.

Autocorrection K.

La fonction \tan est croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right], 0 \leq \underbrace{\tan \frac{\pi}{6}}_{=\frac{1}{\sqrt{3}}} \leq \tan x \leq \underbrace{\tan \frac{\pi}{3}}_{=\sqrt{3}}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est à valeurs ≥ 0 sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$, on peut multiplier cet encadrement par $\frac{1}{x}$ pour obtenir

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right], \frac{1}{x\sqrt{3}} \leq \frac{\tan x}{x} \leq \frac{\sqrt{3}}{x}.$$

On en déduit, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{x} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan x}{x} dx \leq \sqrt{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{x}.$$

Or,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{x=\pi/6}^{\pi/3} = \ln \left(\frac{\pi}{3} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{3} \right) = \ln 2.$$

On en déduit l'encadrement de l'énoncé.

Autocorrection L.

On peut intégrer l'inégalité $\forall t \in \mathbb{R}, t - 1 \leq [t] \leq t$ et obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^2}{2} - x \leq \int_0^x (t - 1) dt \leq \int_0^x [t] dt \leq \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}.$$

On en déduit facilement, d'après le théorème des gendarmes, que $\int_0^x [t] dt \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Autocorrection M.

(i) On a, d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin = \frac{2}{\pi}.$$

$$(ii) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k/n}{1 + k^2/n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_{x=0}^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

$$(iii) \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k/n} + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + 0 = \ln 2.$$

Autocorrection N.

(i) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est lisse. Sa valeur en 0 est 0.

► Sa dérivée est $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, dont la valeur en 0 est $f'(0) = 1$.

► Sa dérivée seconde est $f'' : x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$, dont la valeur en 0 est $f''(0) = -1$.

► Sa dérivée troisième est $f''' : x \mapsto \frac{2}{(1+x)^3}$, dont la valeur en 0 est $f'''(0) = 2$, et qui est à valeurs positives sur \mathbb{R}_+ .

► Sa dérivée quatrième est $f^{(4)} : x \mapsto -\frac{6}{(1+x)^4}$, qui est à valeurs négatives sur \mathbb{R}_+ .

D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 (que l'on peut appliquer parce que f est de classe C^3), quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^2}{2}}_{\geq 0} \underbrace{f'''(t)}_{\geq 0} dt$$
$$\geq x - \frac{x^2}{2}. \quad (\text{croissance de l'intégrale, } 0 \leq x)$$

De même, d'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 (que l'on peut appliquer parce que f est de classe C^4), quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^3}{6}}_{\geq 0} \underbrace{f^{(4)}(t)}_{\leq 0} dt$$
$$\leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \quad (\text{croissance de l'intégrale, } 0 \leq x)$$

(ii) On procède de même pour la fonction \sin .

► La formule de Taylor à l'ordre 3 et le fait que la dérivée quatrième, $\sin^{(4)} = \sin$, est positive sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ montre la première inégalité.

► La formule de Taylor à l'ordre 5 et le fait que la dérivée sixième, $\sin^{(6)} = -\sin$, est négative sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ montre la deuxième inégalité.