Analyse asymptotique

Généralités

Exercice 1.
Trouver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'on ait, pour tout $\alpha > 0$, les relations de négligeabilité $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\alpha x})$.

Exercice 2.
Peut-on trouver $f \in C^0([0,1])$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall \alpha > 0, x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o(f(x))$?

Exercice 3.
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-x^{-2}} \cos\left(e^{x^{-2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. Quelle est la classe de régularité de f ?

Développements limités et autres développements asymptotiques

Exercice 4.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un développement asymptotique de arctan en $+\infty$, à la précision $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Exercice 5.

1. Peut-on trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \sin x + b\, x \cos x = x + \underset{x\to 0}{O}(x^5)$?
2. Parmi les fonctions $(f_{a,b})_{a,b\in\mathbb{R}}$ définies par $f_{a,b} : x \mapsto \sin x - \dfrac{x + ax^3}{1 + bx^2}$, y en a-t-il une qui soit négligeable (en 0) devant toutes les autres ?
3. Peut-on trouver deux réels a et b tels qu'il existe une constante C vérifiant

$$\frac{1}{x} + \frac{a}{\ln(1+x)} + \frac{b}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} Cx \text{ ?}$$

Exercice 6.
Donner un développement asymptotique de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Applications

Calcul de limites et d'équivalents

Autocorrection A. ☑

Donner un équivalent simple des fonctions suivantes, au voisinage du point donné.

(i) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (en $+\infty$) ;

(ii) $x \mapsto \dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x}$ (en 0 et en $+\infty$) ;

(iii) $x \mapsto \ln(1+x^2)-\sin(x^2)+2\cos^2(x)$ (en $+\infty$) ;

(iv) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$ (en 1) ;

(v) $x \mapsto \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x}$ (en 0 et en $+\infty$) ;

(vi) $x \mapsto 1+e^{e^{e^x}}-\arctan x$ (en $-\infty$) ;

(vii) $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (en $+\infty$) ;

(viii) $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ (en π) ;

(ix) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}^3+2}{\sqrt[3]{x}^2+3}$ (en $+\infty$) ;

(x) $x \mapsto \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ (en $+\infty$) ;

(xi) $x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}-1$ (en $+\infty$) ;

(xii) $x \mapsto \sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln(x-1)}$ (en $+\infty$) ;

(xiii) $x \mapsto x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ (en $+\infty$) ;

(xiv) $x \mapsto \sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ (en 0) ;

(xv) $x \mapsto \tan x-\sin x$ (en 0) ;

(xvi) $x \mapsto \ln(1+\sin x)$ (en 0) ;

(xvii) $x \mapsto \ln(\ln(1+x))$ (en 0) ;

(xviii) $x \mapsto \ln(\cos x)$ (en $\pi/2$).

Exercice 7$^+$. ☑

1. Déterminer un équivalent de $x \mapsto x^{\sin x}-(\sin x)^x$ au voisinage de 0.
2. Déterminer un équivalent de $x \mapsto \operatorname{sh}(\sin x)-\sin(\operatorname{sh} x)$ au voisinage de 0.

Exercice 8.

Donner un équivalent simple des fonctions suivantes.

(i) $x \mapsto \arcsin x-\operatorname{sh} x$, au voisinage de 0.

(ii) $x \mapsto \left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 9. *X*

On considère la suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenant une fois la valeur $u_1=1$, deux fois la valeur 2, trois fois la valeur 3, etc.

Donner une expression de u, et en déterminer un équivalent.

Exercice 10$^+$ (Formule de Stirling).

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n\, n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\ln u_{n+1}-\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12\,n^2}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît à partir d'un certain rang et converge vers une limite $\lambda>0$.

Remarque. Cela montre $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\lambda}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. On a en fait $\dfrac{1}{\lambda}=\sqrt{2\pi}$.

Suites récurrentes et implicites

Exercice 11. *X*

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. En donner un équivalent.

Exercice 12. *Mines*

On définit la suite $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $x_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\ln x_n}$. En déterminer un équivalent.

Exercice 13$^+$. *X*

Soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \exp(-x_n)$. En donner un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 14. ☑

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. Montrer que $u_n = n + \underset{n \to +\infty}{O}(1)$.
2. En déduire que $u_{n+1} = n + \dfrac{1}{2} + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$ et en déduire un développement asymptotique de u à la précision $o(1)$.
3. Obtenir un développement asymptotique de u à la précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 15.

On définit une suite u par $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Déterminer la limite de u.
2. Déterminer un équivalent de u.
3. Déterminer un DA à deux termes de u.

Étude locale ou asymptotique de fonctions

Exercice 16.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^2}{e^x - e^{-x}} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

1. Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$?
3. Préciser la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 17.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{1+1/x} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f possède un développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 3 et le calculer. Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

Exercice 18.

Étudier au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arcsin x}$.

(Est-elle prolongeable par continuité ? le prolongement est-il dérivable ? que dire de la position relative du graphe et de sa tangente ?)

Exercice 19.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+1)e^{1/x} \end{cases}$.

Étudier les asymptotes du graphe de f, et la position relative du graphe et de ses asymptotes.

Autres applications

Exercice 20.

1. Déterminer un développement asymptotique de $x \mapsto \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$ à la précision $\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.
2. Montrer que l'ensemble $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, y^2 = x^4 + x^3 + 1\right\}$ est fini.

Exercice 21.

Soit $n \geqslant 1$. Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
3. En interprétant f comme une somme, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.