Séries

Autocorrection A. ☑

Déterminer (en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$) la nature des séries de terme général :

(i) $n\sin(1/n)$;

(ii) $\dfrac{n^n}{2^n}$;

(iii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$;

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(v) $1-\cos\dfrac{\pi}{n}$;

(vi) $\dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$;

(vii) $a^n n!$;

(viii) $ne^{-\sqrt{n}}$;

(ix) $\dfrac{\ln n}{n^a}$;

(x) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$;

(xi) $\dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$;

(xii) $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$;

(xiii) $\sqrt{\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}-1}$;

(xiv) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

(xv) $\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$;

(xvi) $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$;

(xvii) $e^{1/n}-a-\dfrac{b}{n}$;

(xviii) $\dfrac{1}{n^a}\left((n+1)^{1+1/n}-(n-1)^{1-1/n}\right)$.

Exercice 1. ☑

Déterminer la nature des séries suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(ii) $\displaystyle\sum_n \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$;

(iii) $\displaystyle\sum_n \frac{n^\gamma+\ln n}{n^2}$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$;

(iv) $\displaystyle\sum_n \left(\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}\right)$, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (et déterminer la somme le cas échéant) ;

(v) $\displaystyle\sum_n \frac{a^n\cdot 2^{\sqrt{n}}}{b^n+2^{\sqrt{n}}}$, pour $a, b > 0$;

(vi) $\displaystyle\sum_n (1-\operatorname{th}(n))$;

(vii) $\displaystyle\sum_n \left(\sqrt[3]{n^3+\alpha n^2+\beta n+\gamma}-\sqrt{n^2+n+1}\right)$, pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;

(viii) $\displaystyle\sum \left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{n^\alpha}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$;

(ix) $\displaystyle\sum_n \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$;

(x) $\dfrac{a}{\sqrt{1}}+\dfrac{b}{\sqrt{2}}+\dfrac{c}{\sqrt{3}}+\dfrac{a}{\sqrt{4}}+\dfrac{b}{\sqrt{5}}+\dfrac{c}{\sqrt{6}}+\dfrac{a}{\sqrt{7}}+\cdots$, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré ;} \\ 1/n^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Exercice 3.

Quelle est la nature de la série $\sum_n \ln\left(\dfrac{\ln(n+1)^2}{\ln n \ln(n+2)}\right)$?

Exercice 4.

Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha \ln(n)$.

Montrer que si $\alpha > 1$ (resp. < 1), alors $\sum_n e^{-u_n}$ converge (resp. diverge).

Exercice 5⁺.

1. On définit, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{\ln(n!)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
2. On définit, pour $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\, dx$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} v_n$;
3. On considère une suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $w_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} = e^{-w_n}/n^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} w_n$.

Exercice 6⁺.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_1^A e^{-x^n}\, dx$ admet une limite quand $A \to +\infty$, que l'on notera $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx$.

Calculs de sommes

Exercice 7.

Montrer les égalités suivantes, après avoir justifié l'existence des sommes infinies.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$;

(iii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) = \ln 2$;

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(3 + (-1)^k\right)^{-k} = \frac{26}{15}$.

Exercice 8.
Justifier l'existence et calculer la somme des séries suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$;

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}$.

Exercice 9.
Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \big(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\big)$ est-elle convergente ? Le cas échéant, calculer sa somme.

Exercice 10^{+}.
Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

Exercice 11 (Formule de Madhava-Gregory-Leibniz).
En remarquant que $\forall p \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{p+1} = \displaystyle\int_0^1 x^p \, dx$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 12^{++}.
Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Comparaison séries-intégrales

Autocorrection B.
Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 13 (Séries de Bertrand).
On appelle *séries de Bertrand* les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$, pour des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la nature des séries de Bertrand telles que $\alpha \neq 1$, par comparaison avec des séries de Riemann bien choisies.
2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature des séries de Bertrand telles que $\alpha = 1$.

Exercice 14.
Montrer que $(s-1)\zeta(s) \xrightarrow[s\to 1]{} 1$.

Exercice 15. X
Calculer $\left\lfloor \displaystyle\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} \right\rfloor$.

Exercice 16$^+$.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$, croissante et concave.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{f(k)+f(k+1)}{2} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f \leqslant f(k) + \frac{1}{2}f'(k)$.
2. En déduire qu'il existe $C_f \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f + \frac{f(n)}{2} + C_f + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

3. Quelle formule obtient-on dans le cas $f = \ln$?

Exercice 17$^+$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt$ diverge en $+\infty$.
2. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer $\left|\dfrac{\sin(\ln k)}{k} - \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt\right| = O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.

Critères de convergence

Exercice 18.

Soient $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ et $\sum_n w_n$ trois séries réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Montrer que si $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ convergent, alors $\sum_n v_n$ converge également.

Exercice 19.

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, $\sum_n u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.

Exercice 20.

Soit $\sum_n a_n$ une série à termes positifs.

1. Montrer que la convergence de $\sum_n a_n$ entraîne celle de $\sum_n \sqrt{a_n a_{n+1}}$.
2. Montrer que la réciproque est vraie si on suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît, mais qu'elle n'est pas vraie en général.

Exercice 21.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On pose, pour tout n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Exercice 22$^+$ (Critère de d'Alembert).

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que si $\ell < 1$ (resp. $\ell > 1$), alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge (resp. diverge).
2. Montrer que l'on ne peut pas conclure si $\ell = 1$, en exhibant un exemple de chaque nature.

Exercice 23$^+$ (Critère de condensation de Cauchy).

1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissant vers 0. Montrer que $\sum_n a_n$ et $\sum_n 2^n a_{2^n}$ ont même nature.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_n \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$? Généraliser.

Exercice 24 (Sommation par paquets).

Soit $\sum a_n$ une série et φ une extractrice telle que $\varphi(0) = 0$. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{\varphi(p)\leqslant k<\varphi(p+1)} a_k$.

1. Montrer que si $\sum_n a_n$ converge, il en va de même de $\sum_p S_p$ et qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} S_p$.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si $\sum_p S_p$ converge et que $\sum_{\varphi(p)\leqslant k<\varphi(p+1)} |a_k| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$, alors $\sum_n a_n$ converge.

Semi-convergence

Exercice 25.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive et décroissante telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On note, pour tout $N \geqslant 1$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$. Montrer que les suites $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge (c'est le *critère spécial des suites alternées*).
2. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 26.

Déterminer la nature des séries suivantes.

(i) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$.

(ii) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\sum_n \frac{(-1)^n n^\alpha}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\sum_n \sin\left(\sqrt{1+n^2\pi^2}\right)$;

(v) $\sum_n \frac{\sin(n)}{n+(-1)^n}$;

(vi) $\sum_n \sin\left(\frac{\sin(n)}{n^{1/3}}\right)$.

Exercice 27.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left]-1,1\right[^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n a_n$ et $\sum_n \ln(1+a_n)$ convergent. Montrer que $\sum_n a_n^2$ converge.

Exercice 28$^+$.
Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n\rfloor}}{n}$.

Exercice 29.
Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$?

Exercice 30$^+$.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \begin{cases} -4/n & \text{si } 5 \mid n \\ 1/n & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que la série $\sum_n u_n$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 31^{++}.
Soit (a_n) une suite de nombres réels tendant vers 0.

Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

Mélange

Exercice 32.
Soit $\sum_n a_n$ une série à termes positifs convergente (resp. divergente). Montrer qu'il existe une suite b_n positive tendant vers $+\infty$ (resp. 0) telle que $\sum_n a_n b_n$ soit encore convergente (resp. divergente).

Exercice 33^{++}.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\Delta u = \left(u_{n+1} - u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n^2}$ converge.

Montrer $u_n = o(n)$.

Exercice 34.

1. Donner un équivalent de l'aire u_n comprise entre le graphe de $\ln$ sur $[n, n+1]$ et la corde correspondante.
2. En déduire un développement asymptotique à 5 termes de $\ln n!$ puis un développement asymptotique à deux termes de $n!$.

Exercice 35.
Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(2 - 3^{1/k}\right)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{\ln(3)}}$.

Exercice 36$^+$.

1. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs convergentes telles que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

2. En utilisant la question précédente, donner un équivalent, pour tout $\alpha \in]1,+\infty[$, de $\displaystyle\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Comment peut-on obtenir cet équivalent directement ?

3. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 37. *X (PSI)*

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ sa somme partielle telles que $a_n S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

1. Montrer que $\sum a_n$ diverge et que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Montrer que $S_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} S_{n+2}$.
3. Montrer que $S_{n+1}^2 - S_{n+2}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2$.
4. Montrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.
5. Réciproquement, montrer que si $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, $b_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 38$^+$.

1. Déterminer toutes les fonctions $f \in C^0([0,1])$ telles que $\forall x \in [0,1], f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f \in C^0([0,1])$ telles que $\forall x \in [0,1], f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{3^n}$.

Exercice 39$^+$.

1. Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction injective. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n^2}$ diverge.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n^\alpha}$ diverge.

Exercice 40^{++}.

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs convergente telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrer que pour tout $S \in \left[0, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right]$, il existe un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_A(k)\, u_k$.