Espaces euclidiens

Exercice 8.

On pourra montrer *l'identité du parallélogramme généralisée* : $\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{\pm1\}^n}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.

Exercice 13.

Faire un dessin !

Exercice 15.

On pourra procéder par récurrence et démontrer que quand on projette une famille obtusangle « dans la bonne direction », la famille projetée reste obtusangle (et les angles deviennent même plus obtus).

Exercice 20.

On pourra constater que M est orthogonale (pour le produit scalaire canonique) à son projeté orthogonal sur $A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 26.

On pourra trouver une manière de modifier la définition de F, de telle sorte qu'un vecteur normal à F devienne immédiatement apparent.

Exercice 30.

Une bonne étape intermédiaire est $F \cap G^\perp = \{0_E\}$.

Exercice 31.

On pourra s'intéresser à $\operatorname{tr}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

Exercice 34.

On pourra montrer que le seul vecteur orthogonal à tous les f_k est le vecteur nul.

Autocorrection

Autocorrection A.

On vérifie successivement les axiomes.

Positivité. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\langle P|P\rangle = \int_0^1 P(t)^2\,dt \geqslant 0$.

Caractère défini. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P|P\rangle = 0$.

On a donc $\int_0^1 P(t)^2\,dt = 0$. La fonction polynomiale $t \mapsto P(t)^2$ étant positive et continue, on en déduit que $\forall t \in [0,1], P(t) = 0$ par stricte positivité de l'intégrale.

D'après le critère radical de nullité, on en déduit $P = 0$.

Symétrie. La symétrie est claire.

Bilinéarité. La bilinéarité de $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est une conséquence directe de la linéarité de l'intégrale : pour tous $P, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle P|Q_1 + \lambda Q_2\rangle = \int_0^1 \big(P(t)\,Q_1(t) + \lambda\, P(t)\,Q(t)\big)\,dt = \int_0^1 P(t)\,Q_1(t)\;dt + \lambda \int_0^1 P(t)\,Q_2(t)\;dt = \langle P|Q_1\rangle + \lambda\,\langle P|Q_2\rangle\,.$$

(Remarquons que la symétrie dispense de vérifier la linéarité par rapport à la première variable.)

Autocorrection B.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \times 1 \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}}\,\sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2} = 2^{n/2}\,\sqrt{n+1}.$$

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour le produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(I_n^T\,A) = \langle I_n|A\rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$|\langle I_n|A\rangle| \leqslant \|I_n\|\,\|A\| = \sqrt{n}\,\|A\|.$$

3. Il y a beaucoup de manières de montrer ce résultat, mais il suffit par exemple d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (sous la forme $\langle y|z\rangle^2 \leqslant \|y\|^2\,\|z\|^2$) dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ à deux vecteurs bien choisis :

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\,\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right).$$

Autocorrection C.

Il suffit de se souvenir que $\underbrace{p(x)}_{\in F} \perp \underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp}$, donc

$$d(x,F)^2 = \|x - p(x)\|^2 = \langle x - p(x)|x - p(x)\rangle = \langle x|x - p(x)\rangle + \underbrace{\langle p(x)|x - p(x)\rangle}_{=0}.$$

Autocorrection D.

(i) Il s'agit, dans $C^0([0,1])$ muni du produit scalaire canonique, de trouver la distance au carré de $i : t \mapsto t$ au plan $F = \mathrm{Vect}(r : t \mapsto \sqrt{t}, u : t \mapsto 1)$.

- Le projeté orthogonal de i sur F est l'unique élément $ar + bu$ de F faisant avec les éléments de F les mêmes produits scalaires que i, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \langle ar + bu|u\rangle = \langle i|u\rangle \\ \langle ar + bu|r\rangle = \langle i|r\rangle \end{cases} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \begin{cases} \dfrac{2}{3}a + \ \ b \ = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}a + \dfrac{2}{3}b = \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

  Après résolution du système, on trouve que le projeté est $p = \dfrac{6}{5}r - \dfrac{3}{10}u : t \mapsto \dfrac{6}{5}\sqrt{t} - \dfrac{3}{10}$.

- La distance au carré cherchée est donc

$$\begin{aligned}
\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t-(a\sqrt{t}+b)\right)^2 \mathrm{d}t &= \|i-p\|^2 \\
&= \langle i-p | i-p\rangle \\
&= \langle i | i-p\rangle && (\text{car } p \perp i-p) \\
&= \int_0^1 t\left(t-\left(\frac{6}{5}\sqrt{t}-\frac{3}{10}\right)\right) \\
&= \frac{1}{300}.
\end{aligned}$$

(ii) On procède de même (ou de même que dans le cours). On cherche ici la distance au carré de X^3 à $F=\mathbb{R}_2[X]$ dans l'espace $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire canonique.

- En résolvant le système $\begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = \frac{1}{4} \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c = \frac{1}{6} \end{cases}$ (traduisant que $a+bX+cX^2$, le projeté orthogonal cherché, possède les mêmes produits scalaires « contre » les éléments de F que le polynôme X^3), on obtient que le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est $\frac{3}{2}X^2-\frac{3}{5}X+\frac{1}{20}$.
- Cela donne la distance au carré cherchée :

$$\begin{aligned}
\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^3-(a+bt+ct^2)\right)^2 \mathrm{d}t &= \|t\mapsto t^3-(a+bt+ct^2)\|^2 \\
&= \left\langle t\mapsto t^3-(a+bt+ct^2) \middle| t\mapsto t^3\right\rangle && (\text{Pythagore}) \\
&= \frac{1}{2\,800}.
\end{aligned}$$