Espaces euclidiens

Généralités

Exemples d'espaces préhilbertiens

Autocorrection A.

Montrer que l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle : (P, Q) \mapsto \langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.

Soit $D \in D_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.

À quelle condition la formule $\langle X|Y\rangle = X^T DY$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'espace E, muni de $\langle\cdot|\cdot\rangle$, est un espace préhilbertien.

(i) $E = C^1([-1, 1])$, $\langle\cdot|\cdot\rangle : (f, g) \mapsto \langle f|g\rangle = f(0)\, g(0) + \displaystyle\int_{-1}^1 f'(t)\, g'(t)\, dt$;

(ii) $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle\cdot|\cdot\rangle : (P, Q) \mapsto \langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)\, Q^{(k)}(0)$;

(iii) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle\cdot|\cdot\rangle : (P, Q) \mapsto \langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)\, Q^{(k)}(a_k)$, pour $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ quelconques.

Exercice 3.

Montrer que l'application

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\, P(n)\, Q(n) \end{cases}$$

est un produit scalaire bien défini sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4$^+$.

Soit $w \in C^0([-1, 1])$. On définit l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle_w : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\, g(t)\, w(t)\, dt$.

Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle_w$ est un produit scalaire sur $C^0([0, 1])$ si et seulement si w est à valeurs positives et que l'ensemble de ses zéros ne contient aucun intervalle non trivial.

Exercice 5$^+$.

Montrer que la formule $\forall f, g \in C^1([0, 1]), \langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f'\, g' + f(1)\, g(0) + f(0)\, g(1)$ définit un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur $C^1([0, 1])$.

Propriétés des normes dérivant d'un produit scalaire

Exercice 6 (Stricte convexité de la sphère unité).

1. Soit E un espace préhilbertien et $x \neq y \in E$ deux éléments tels que $\|x\| = \|y\| = 1$.

   Montrer $\forall t \in]0,1[\,, \|(1-t)x + ty\| < 1$.
2. En déduire que la norme uniforme sur $C^0([0,1])$ ne dérive pas d'un produit scalaire.

Exercice 7 (Identité du parallélogramme). ☑

1. Soit E un espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

   et interpréter cette égalité géométriquement.
2. En déduire une nouvelle démonstration du fait que la « norme Manhattan » $\|(x,y)\|_M = |x|+|y|$, définie sur $\mathbb{R}^2$, ne dérive pas d'un produit scalaire.

Exercice 8. 💡☑

Soit E un espace préhilbertien, $u_1, \dots, u_n \in E$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que $\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$, $\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i \right\| \leqslant C$.

Montrer $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \leqslant C^2$.

Inégalités (dont Cauchy-Schwarz)

Autocorrection B. ☑

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant 2^{n/2}\sqrt{n+1}$.
2. Montrer que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $|\operatorname{tr} A| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$.

Exercice 9.

Montrer $\forall A, B \in S_n(\mathbb{R})$, $\big(\operatorname{tr}(AB+BA)\big)^2 \leqslant 4\ \operatorname{tr}(A^2)\ \operatorname{tr}(B^2)$.

Exercice 10.

Soit $f \in C^0([0,1])$ positive telle que $\forall x \in [0,1]\,, f(x)\,f(1-x) = 1$. Montrer que $\int_0^1 f \geqslant 1$.

Exercice 11$^+$.

On note $S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^n x_k = 1 \right\}$. Minimiser et maximiser $\sum_{1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n} x_k x_\ell$ pour $x \in S$.

Exercice 12.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le moment $s_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt$ et la matrice $H_n = (s_{i+j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer $\forall X \in \mathbb{R}^{n+1}, X^T H_n X \geqslant 0$.
2. En déduire $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $s_{p+q}^2 \leqslant s_{2p}\, s_{2q}$, puis montrer cette inégalité directement à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Configurations géométriques

Exercice 13.

Soit $(v_i)_{i=1}^3$ une famille de trois vecteurs unitaires d'un espace euclidien E.

On suppose que quels que soient $i \neq j$, $\langle v_i | v_j \rangle = -\frac{1}{2}$. Montrer que les trois vecteurs sont coplanaires.

Exercice 14$^+$ (Simplexe régulier).

Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer qu'il existe $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ unitaires tels que $\forall i \neq j \in [\![0, n]\!], \langle x_i | x_j \rangle = -\frac{1}{n}$.

Exercice 15$^+$ (Familles obtusangles).

Soit E un espace euclidien et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E telle que $\forall i \neq j \in [\![1, p]\!], \langle x_i | x_j \rangle < 0$.

Montrer que $p \leqslant 1 + \dim E$.

Orthogonalité

Exercice 16.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad \text{et} \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 17.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace préhilbertien réel E.

On suppose que $F \perp G$. Montrer que $F^\perp = G$.

Exercice 18.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $F, G \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels.

Montrer que F et G sont orthogonaux si et seulement si $\forall u \in F, \forall v \in G, \|u + v\| \geqslant \|u\|$.

Exercice 19.

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.

1. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, montrer que toute forme linéaire $\alpha : E \to \mathbb{R}$ telle que F et $F^\perp$ soient inclus dans $\ker(\alpha)$ est nulle.
2. En déduire une nouvelle démonstration du fait que $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 20$^+$.

Trouver toutes les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M\,M^T$.

Exercice 21.

On munit $C^0([0,1])$ du produit scalaire canonique. On note $e_n : x \mapsto x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $f \in C^0([0,1])$ telle que $f \perp e_0$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans $]0,1[$.
2. Soit $f \in C^0([0,1])$ telle que $f \perp e_0, e_1$. Montrer que f s'annule au moins deux fois dans $]0,1[$.
3. Généraliser.

Exercice 22$^+$.

Dans tout l'exercice, on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$.

1. Dans cette question, on fixe $n = 2$.
   (a) Donner une base de $\mathrm{Vect}(X, X^2)^\perp$.
   (b) Construire $A_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = \displaystyle\int_0^1 A_2(t)\,P(t)\,dt$.
2. On revient maintenant à $n \in \mathbb{N}$ quelconque.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \displaystyle\int_0^1 A_n(t)\,P(t)\,dt$.
   (b) Montrer que $\deg A_n = n$.
3. Existe-t-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \displaystyle\int_0^1 A(t)\,P(t)\,dt$?

Exercice 23$^+$ (Polynômes de Legendre).

On munit l'ensemble $C^0([-1,1])$ du produit scalaire canonique.

1. Montrer que l'équation différentielle $\big((1-x^2)y'\big)' + n(n+1)\,y = 0$ possède une unique solution polynomiale P_n unitaire et de degré $\leqslant n$, et montrer que celle-ci est de degré n exactement.
2. Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. Le réel 1 est-il racine de P_n ?
3. On appelle n-*ième polynôme de Legendre* le polynôme $L_n = \dfrac{P_n}{P_n(1)}$.

   Montrer que L_n est proportionnel à $\big((1-X^2)^n\big)^{(n)}$.

Distance, projection

Autocorrection C.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E, et p le projecteur orthogonal sur F. Montrer $\forall x \in E, d(x,F)^2 = \langle x|x - p(x)\rangle$.

Autocorrection D.

Calculer les infima suivants, sans utiliser le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

(i) $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \big(t - (a\sqrt{t} + b)\big)^2\,dt\,;$

(ii) $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \big(t^3 - (a + bt + ct^2)\big)^2\,dt.$

Exercice 24.

1. Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. À quelle condition $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X]^2 \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k) \end{cases}$ est-il un produit scalaire ?
2. On suppose désormais qu'il s'agit bien d'un produit scalaire. En donner une base orthonormée.
3. Soit $\mathcal{F} = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$. Déterminer la distance de X^n à $\mathcal{F}$.

Exercice 25.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et on note $J_n = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Calculer $\inf \left\{ \|M - \alpha I_n - \beta J_n\| \;\middle|\; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 26.

On munit $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $\langle A|B \rangle = \displaystyle\int_0^1 AB$ et on pose $Q = 1 + X + X^2 + X^3 \in E$.

1. Montrer que $F = \left\{ P \in E \;\middle|\; \displaystyle\int_0^1 (t^3 - t)\, P'(t)\, dt = \int_0^1 P \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Calculer $d(Q, F)$.

Exercice 27.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$ est un produit scalaire sur $C^1([0,1])$.
2. On pose $F = \left\{ f \in C^2([0,1]) \;\middle|\; f'' = f \right\}$. Montrer que
$$F^\perp = \left\{ f \in C^1([0,1]) \;\middle|\; f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$
3. Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale de $C^1([0,1])$ sur F.
4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose
$$E_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in C^1([0,1]) \;\middle|\; f(0) = \alpha, f(1) = \beta \right\}.$$
Montrer l'égalité
$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2)\, dt = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{ch} 1 - 2\alpha\beta}{\operatorname{sh} 1}.$$

Exercice 28.

Soit $f \in C^0([0,1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x f(x)\, dx = 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\, dx \geqslant 4$.

Exercice 29.

Soit E un espace préhilbertien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 30.

Soit E un espace euclidien, dont on note $S = \left\{ u \in E \;\middle|\; \|u\| = 1 \right\}$ la sphère unité. Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\forall u \in S \cap F, \exists v \in G : \|u - v\| < 1$.

Montrer $\dim F \leqslant \dim G$.

Exercice 31.

Soit E un espace euclidien possédant une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $p \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel F de E. Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \|p(e_j)\|^2$ en fonction de dim F.

Mélange

Exercice 32$^+$.

Soit E un espace euclidien de dimension n.

Une famille $\mathcal{T} = (u_1, \dots, u_p)$ est une *trame de Parseval* de E si $\forall x \in E, \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle x|u_k\rangle^2$.

1. Montrer que toute trame de Parseval engendre E.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal sur F. Montrer que l'image par p d'une base orthonormée de E est une trame de Parseval de F.

Le but de la fin de l'exercice est d'établir une espèce de réciproque à la dernière question.

3. Montrer qu'une trame de Parseval de E possédant n vecteurs est nécessairement une base orthonormée de E.
4. On suppose que F est un hyperplan de E et que $\mathcal{T} = (u_1, \dots, u_n)$ est une trame de Parseval de F.

   Construire une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dont l'image par p est $\mathcal{T}$.
5. Conclure.

Exercice 33$^+$ (Deux modes de convergence).

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et $\ell \in E$. On dit :

- que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* vers ℓ si et seulement si $\|\ell - x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
- que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement* vers ℓ si et seulement si $\forall y \in E, \langle y|\ell - x_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Montrer l'unicité de la limite pour ces deux types de convergence.
2. Montrer que la convergence entraîne la convergence faible.
3. On suppose E euclidien. Montrer que la convergence faible entraîne la convergence.
4. Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite e_n qui vaut 1 en n-ième position et 0 ailleurs. Montrer que la suite (de suites) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $0_{\ell^2(\mathbb{N})}$, et en déduire que cette suite ne converge pas.

Exercice 34^{++}.

Soit E un espace euclidien possédant une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.

1. Montrer que toute famille $(f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de E vérifiant $\forall k \in [\![1, n]\!], \|f_k - e_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est encore une base de E.
2. La propriété reste-t-elle vraie si l'on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large ?