Déterminants

Exercice 5.

Pour la première question, on pourra effectuer des opérations sur les lignes « par blocs » ou, ce qui revient au même, multiplier par une habile matrice triangulaire par blocs.

Exercice 8.

On peut obtenir une relation de récurrence à l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes.

Exercice 12.

Le déterminant à calculer ressemble à un mineur. Il s'agit donc de le « compléter » en un déterminant $(n+1) \times (n+1)$ dans lequel on pourra *identifier* le mineur correspondant à la k-ième colonne (et une certaine ligne).

Exercice 13.

- Pour la deuxième question, il n'est pas nécessaire d'utiliser le processus d'orthonormalisation.
- Pour la quatrième question, on pourra montrer $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \ker\left(M^T M\right) = \ker(M)$.

Exercice 14.

Deux idées possibles :

- utiliser la positivité des déterminants de Gram vue dans un exercice précédent ;
- voir E comme un hyperplan de vecteur normal e_0 dans un espace euclidien $\widehat{E}$ (comment est-ce possible ?) et considérer la famille orthogonale $(e_0 + x_1, \ldots, e_0 + x_n)$.

Exercice 25.

Exo bidouillesque à mort. Il faut arriver à $M^3 = I_n$ pour une certaine matrice bien choisie, et en déduire $\text{dét}(M) = 1$.

Exercice 26.

On pourra essayer d'utiliser le caractère multilinéaire alterné du déterminant.

Exercice 27.

Se ramener à l'unicité (à constante multiplicative près) des formes n-linéaires alternées.

Exercice 32.

On pourra utiliser des opérations élémentaires, en raisonnant « par blocs ».

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) 0;

(ii) $(1-a^2)^2$;

(iii) $(a-b)^2(a+b+2c)(a+b-2c)$;

(iv) 0;

(v) $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_1 \cdots a_n$;

(vi) $D_{2n} = D_{2n+1} = (-1)^n$.