Déterminants

Calcul

Autocorrection A.

Calculer les déterminants des matrices suivantes, où $a, b, c, d, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sont des paramètres.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$;

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$;

(iii) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$;

(iv) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$;

(v) $\det\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, E_{i,n+1-i}\right)$;

(vi) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (matrice $n \times n$).

Exercice 1.

Calculer les déterminants $n \times n$ suivants (a, x, y et z désignent des paramètres réels).

(i) $\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \dots & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}$;

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$;

(iii) $\begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ y & 0 & z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}$;

(iv) $\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$, où $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$.

Exercice 2.

Calculer les déterminants $n \times n$ suivants (a désigne un paramètre réel).

(i) $\det\left(a^{\max(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$;

(ii) $\det\left(\binom{i}{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$;

(iii) $\det\left(\binom{i+j-2}{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$;

(iv) $\det\left(P(i+j-1)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, où $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $J = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que J est semblable à $n\,E_{1,1}$.
2. En déduire la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

Exercice 4.

Soit $a_1, \dots, a_n \in K$. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ & & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ & (a_1) & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_1 \end{vmatrix}$.

Exercice 5$^+$ (Complément de Schur).

Soit $A, B, C, D \in M_n(K)$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$.

1. On suppose A inversible. Montrer $\det(M) = \det(A)\ \det(D - CA^{-1}B)$.
2. On suppose en outre que A et C commutent. Montrer que $\det(M) = \det(AD - CB)$.

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.

Déterminer $\det(s)$ en fonction de la dimension de l'espace propre $E_1(s)$.

Déterminants célèbres

Exercice 7$^+$ (Déterminants circulants).

Dans tout l'exercice, on fixe $n \geqslant 2$ et $\zeta = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

1. On note $C = E_{1,n} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j} \in M_n(\mathbb{C})$.

   Montrer $C^n = I_n$.
2. Montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, l'espace vectoriel $\{X \in \mathbb{C}^n \mid CX = \omega X\}$ est une droite, et en déduire que C est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1})$.
3. En déduire que, pour tous $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(a_0 + \zeta^j a_1 + \cdots + \zeta^{j(n-1)} a_{n-1} \right).$$

Exercice 8^{++} (Déterminant de Cauchy).

Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n \in K$ tels que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_i + b_j \neq 0$.

Calculer le déterminant de $\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 9$^+$ (Déterminant de Pascal).

1. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels et $(P_0, \dots, P_{n-1})$ une famille échelonnée au sens fort de polynômes. Calculer le déterminant $\det\left(P_{j-1}(x_i)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ en fonction du déterminant de Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n)$.
2. En déduire $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-1} \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots & \binom{n}{n-2} & \binom{n+1}{n-1} \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \cdots & \binom{n+1}{n-2} & \binom{n+2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{3} & \cdots & \binom{2n-4}{n-2} & \binom{2n-3}{n-1} \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{2} & \binom{n+2}{3} & \cdots & \binom{2n-3}{n-2} & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$.

Exercice 10.

1. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels et $(P_0, \dots, P_{n-1})$ une famille échelonnée au sens fort de polynômes. Calculer le déterminant $\det\left(P_{j-1}(x_i)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ en fonction du déterminant de Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n)$.
2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos\left((n-1)\theta_1\right) \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos\left((n-1)\theta_2\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos\left((n-1)\theta_n\right) \end{vmatrix}$.

Exercice 11$^+$.

Soit $a_1, \dots, a_n \in K$ (on convient que $a_{n+1} = a_1$) et $M \in M_n(K)$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $[M]_{i,j} = a_j^i + a_{j+1}^i$.

1. Calculer le déterminant de M.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible.

Exercice 12^{++}. *X*

Soit $x_1, \dots, x_n \in K$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{k-1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

Exercice 13$^+$ (Déterminants de Gram).

Étant donné une famille $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ dans un espace préhilbertien E, on définit le *déterminant de Gram* (ou *gramien*) $G(\mathcal{F}) = \det\left(\langle x_i | x_j \rangle\right)_{i=1}^n$.

1. On suppose $\mathcal{F}$ liée. Montrer que $G(\mathcal{F}) = 0$.

Dans la suite, on suppose la famille $\mathcal{F}$ libre.

2. Montrer qu'il existe une famille orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
3. Exprimer les coefficients de $M = {}_{\mathcal{B}}[\mathcal{F}]$ à l'aide de produits scalaires, et en déduire l'égalité $G(\mathcal{F}) = \det\left(M^T M\right)$.
4. Montrer que $G(\mathcal{F}) > 0$.
5. **Application**. Montrer que $\det\left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} > 0$.

Remarque. *In fine*, on a démontré $G(\mathcal{F}) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est liée.

Exercice 14++.

Soit E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que $\forall i \neq j \in [\![1, p]\!], \langle x_i | x_j \rangle = -1$.

Montrer $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{1 + \|x_i\|^2} \leqslant 1$. Quels sont les cas d'égalité ?

Déterminants et polynômes

Exercice 15.

On considère l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto P(1 - X)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\operatorname{tr} \varphi$ et $\operatorname{dét} \varphi$.

Exercice 16.

Pour tout $P \in \mathbb{R}^n$, on note $Q = f(P)$ le polynôme défini par $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\, dt$.

1. Montrer que f est un endomorphisme bien défini de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\operatorname{dét}(f)$.

Exercice 17.

Soit $E = \left\{ x \mapsto P(x)e^x \,\middle|\, P \in \mathbb{R}_n[X] \right\}$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme de dérivation sur E.

Exercice 18+.

Soit $n \geqslant 2$ et $P = X^n - X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que P est simplement scindé dans $\mathbb{C}$. On note $z_1, \dots, z_n$ ses racines.
2. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 1 + z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + z_n \end{vmatrix}.$$

Rang et perturbation du déterminant

Exercice 19.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, avec B de rang 1. Montrer que $\operatorname{dét}\left((A + B)(A - B)\right) \leqslant (\operatorname{dét} A)^2$.

Exercice 20.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \operatorname{dét}(A + tB)$ est polynomiale, de degré $\leqslant \operatorname{rg} B$.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \operatorname{dét}(t\, I_n - A)$ est polynomiale et déterminer son degré et ses racines.
3. Trouver une suite de matrices inversibles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} A$ (où la convergence signifie que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $[A_n]_{i,j} \xrightarrow[n \to +\infty]{} [A]_{i,j}$).

Exercice 21+.

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Étant donné deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers (ce que l'on notera simplement $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$), on dit que A et B sont *congrues modulo* m si l'on a les relations de congruence $\forall i, j \in [\![1, n]\!], [A]_{i,j} \equiv [B]_{i,j} \pmod{m}$. On notera dans ce cas $A \equiv B \pmod{m}$,

   Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A, B \in M_n(\mathbb{Z}), A \equiv B \pmod{m} \Rightarrow \operatorname{dét}(A) \equiv \operatorname{dét}(B) \pmod{m}$.
2. Soit $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, [A]_{i,i} = 0$ et $\forall i \neq j, [A]_{i,j} \in \{\pm 1\}$. Montrer que A est inversible.

3. Un fermier possède $(2n+1)$ vaches. À l'aide d'une énorme balance de Roberval, il remarque que, quelle que soit la vache que l'on laisse de côté, les $2n$ vaches restantes peuvent se répartir en deux groupes de n de même masse totale. Montrer que toutes les vaches ont la même masse.
4. **Question bonus.** Dessiner la scène précédente, et me l'envoyer par mail.

Exercice 22$^+$ (Déterminant de Hurwitz et théorème de De Bruijn-Erdős).

1. Soit $A, H \in M_n(K)$, avec H de rang 1. Montrer que $t \mapsto \det(A+tH)$ est une fonction affine.
2. Soit $a, b, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$. Calculer $\begin{vmatrix} r_1 & a & a & \cdots & a \\ b & r_2 & a & \cdots & a \\ b & b & r_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & r_n \end{vmatrix}$.
3. En déduire que $\begin{pmatrix} r_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & r_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$ est inversible dès que $r_i > 1$.
4. En déduire que n points non alignés du plan définissent au moins n droites.

Mélange

Exercice 23.

Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $J \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $J^2 = -I_n$ si et seulement si n est pair.

Exercice 24.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = -f$. On note $r = \operatorname{rg}(f)$.

1. Montrer qu'il existe $A \in GL_r(\mathbb{R})$ et une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0_{r,3-r} \\ 0_{3-r,r} & 0_r \end{pmatrix}$.
2. En déduire que si f n'est pas nul, il existe une base dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 25$^+$.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que A, B et $A+B$ soient inversibles vérifiant $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

Montrer que $\det A = \det B$.

Exercice 26. X

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients appartiennent à $\{\pm 1\}$.

Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Exercice 27$^+$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\varphi : \begin{cases} E \times \cdots \times E \to & K \\ (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}\big(u(x_1), x_2, \dots, x_n\big) + \cdots + \det_{\mathcal{B}}\big(x_1, x_2, \dots, u(x_n)\big). \end{cases}$$

Montrer $\varphi = \operatorname{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}$.

Exercice 28.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. À quelle condition a-t-on

$$\forall x_1 < x_2 < x_3, \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0 \text{ ?}$$

Exercice 29$^+$.

Soit $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\operatorname{dét} \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0$.

Exercice 30.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{dét}(A + B) = f(\operatorname{dét} A, \operatorname{dét} B) \text{ ?}$$

2. Quelles sont les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{dét}(A + B) = \operatorname{dét}(A) + \operatorname{dét}(B) \text{ ?}$$

Exercice 31.

Soit $A, B \in M_n(K)$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

Montrer que $\operatorname{dét} M = \operatorname{dét}(A + B) \operatorname{dét}(A - B)$.

Exercice 32$^+$. *X*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$.