

Séries

Autocorrection A.

Déterminer (en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$) la nature des séries de terme général :

- | | |
|--|---|
| (i) $n \sin(1/n)$; | (xi) $\frac{\ln(n^2 + 3)\sqrt{2^n + 1}}{4^n}$; |
| (ii) $\frac{n^n}{2^n}$; | (xii) $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$; |
| (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$; | (xiii) $\sqrt{\operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1}$; |
| (iv) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; | (xiv) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; |
| (v) $1 - \cos \frac{\pi}{n}$; | (xv) $\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$; |
| (vi) $\frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1}$; | (xvi) $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$; |
| (vii) $a^n n!$; | (xvii) $e^{1/n} - a - \frac{b}{n}$; |
| (viii) $ne^{-\sqrt{n}}$; | (xviii) $\frac{1}{n^\alpha} \left((n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}\right)$. |
| (ix) $\frac{\ln n}{n^a}$; | |
| (x) $\ln\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}\right)$; | |

Exercice 1.

Déterminer la nature des séries suivantes.

- (i) $\sum_n \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;
- (ii) $\sum_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$;
- (iii) $\sum_n \frac{n^\gamma + \ln n}{n^2}$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$;
- (iv) $\sum_n \left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right)$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (et déterminer la somme le cas échéant);
- (v) $\sum_n \frac{a^n \cdot 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$, pour $a, b > 0$;
- (vi) $\sum_n (1 - \operatorname{th}(n))$;
- (vii) $\sum_n \left(\sqrt[3]{n^3 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma} - \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$, pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;
- (viii) $\sum_n \left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$;
- (ix) $\sum_n \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (x) $\frac{a}{\sqrt{1}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{4}} + \frac{b}{\sqrt{5}} + \frac{c}{\sqrt{6}} + \frac{a}{\sqrt{7}} + \dots$, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré;} \\ 1/n^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 3.

Quelle est la nature de la série $\sum_n \ln \left(\frac{\ln(n+1)^2}{\ln n \ln(n+2)} \right)$?

Exercice 4.

Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \ln(n)$.

Montrer que si $\alpha > 1$ (resp. < 1), alors $\sum_n e^{-u_n}$ converge (resp. diverge).

Exercice 5⁺.

1. On définit, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

2. On définit, pour $n \geq 1$, $v_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} v_n$;

3. On considère une suite $(w_n)_{n \geq 1}$ telle que $w_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} = e^{-w_n}/n^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} w_n$.

Exercice 6⁺.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $A \mapsto \int_1^A e^{-x^n} dx$ admet une limite quand $A \rightarrow +\infty$, que l'on notera $\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

Calculs de sommes

Exercice 7.

Montrer les égalités suivantes, après avoir justifié l'existence des sommes infinies.

$$(i) \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = -\ln 2;$$

$$(iii) \sum_{k=2}^{+\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} \right) = \ln 2;$$

$$(ii) \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 0;$$

$$(iv) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(3 + (-1)^k \right)^{-k} = \frac{26}{15}.$$

Exercice 8.

Justifier l'existence et calculer la somme des séries suivantes.

$$(i) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)};$$

$$(iii) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)};$$

$$(ii) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1};$$

$$(iv) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}.$$

Exercice 9.

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 1} (\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$ est-elle convergente?

Le cas échéant, calculer sa somme.

Exercice 10⁺.

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

Exercice 11 (Formule de Madhava-Gregory-Leibniz).

En remarquant que $\forall p \in \mathbb{N}, \frac{1}{p+1} = \int_0^1 x^p dx$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 12⁺⁺.

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Comparaison séries-intégrales

Autocorrection B.

Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 13 (Séries de Bertrand).

On appelle *séries de Bertrand* les séries $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, pour des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la nature des séries de Bertrand telles que $\alpha \neq 1$, par comparaison avec des séries de Riemann bien choisies.
2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature des séries de Bertrand telles que $\alpha = 1$.

Exercice 14.

Montrer que $(s-1)\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1} 1$.

Exercice 15.

Calculer $\left[\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} \right]$.

Exercice 16⁺.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(\ln t)}{t} dt$ diverge en $+\infty$.
2. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer $\left| \frac{\sin(\ln k)}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\sin(\ln t)}{t} dt \right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.

Critères de convergence**Exercice 17.**

Soient $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ et $\sum_n w_n$ trois séries réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$.

Montrer que si $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ convergent, alors $\sum_n v_n$ converge également.

Exercice 18.

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, $\sum_n u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.

Exercice 19.

Soit $\sum_n a_n$ une série à termes positifs.

1. Montrer que la convergence de $\sum_n a_n$ entraîne celle de $\sum_n \sqrt{a_n a_{n+1}}$.
2. Montrer que la réciproque est vraie si on suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît, mais qu'elle n'est pas vraie en général.

Exercice 20.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On pose, pour tout n , $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Exercice 21⁺ (Critère de d'Alembert).

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que si $\ell < 1$ (resp. $\ell > 1$), alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge (resp. diverge).
2. Montrer que l'on ne peut pas conclure si $\ell = 1$, en exhibant un exemple de chaque nature.

Exercice 22⁺ (Critère de condensation de Cauchy). 💡

1. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle décroissant vers 0.
Montrer que les séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n 2^n a_{2^n}$ ont même nature.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_n \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$? Généraliser.

Exercice 23 (Somme par paquets).

Soit $\sum a_n$ une série et φ une extractrice telle que $\varphi(0) = 0$. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{\varphi(p) \leq k < \varphi(p+1)} a_k$.

1. Montrer que si $\sum_n a_n$ converge, il en va de même de $\sum_p S_p$ et qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} S_p$.
2. Montrer que la réciproque est fautive.
3. Montrer que si $\sum_p S_p$ converge et que $\sum_{\varphi(p) \leq k < \varphi(p+1)} |a_k| \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, alors $\sum_n a_n$ converge.

Semi-convergence

Exercice 24.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive et décroissante telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On note, pour tout $N \geq 1$, $S_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n u_n$. Montrer que les suites $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge (c'est le *critère spécial des suites alternées*).
2. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 25. ☑

Déterminer la nature des séries suivantes.

- | | |
|--|--|
| (i) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n + \sin n}$. | (iv) $\sum_n \sin(\sqrt{1 + n^2 \pi^2})$; |
| (ii) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$; | (v) $\sum_n \frac{\sin(n)}{n + (-1)^n}$; |
| (iii) $\sum_n \frac{(-1)^n n^\alpha}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$; | (vi) $\sum_n \sin\left(\frac{\sin(n)}{n^{1/3}}\right)$. |

Exercice 26.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]-1, 1[^\mathbb{N}$ telle que $\sum_n a_n$ et $\sum_n \ln(1 + a_n)$ convergent. Montrer que $\sum_n a_n^2$ converge.

Exercice 27⁺. ☑

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

Exercice 28.

Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$?

Exercice 29⁺.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \begin{cases} -4/n & \text{si } 5 \mid n \\ 1/n & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que la série $\sum_n u_n$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 30⁺⁺.

Soit (a_n) une suite de nombres réels tendant vers 0.

Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

Mélange

Exercice 31.

Soit $\sum_n a_n$ une série à termes positifs convergente (resp. divergente). Montrer qu'il existe une suite b_n positive tendant vers $+\infty$ (resp. 0) telle que $\sum_n a_n b_n$ soit encore convergente (resp. divergente).

Exercice 32⁺⁺.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\Delta u = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n^2}$ converge.

Montrer $u_n = o(n)$.

Exercice 33.

1. Donner un équivalent de l'aire u_n comprise entre le graphe de \ln sur $[n, n+1]$ et la corde correspondante.
2. En déduire un développement asymptotique à 5 termes de $\ln n!$ puis un développement asymptotique à deux termes de $n!$.

Exercice 34⁺.

1. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs convergentes telles que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$.

Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

2. En utilisant la question précédente, donner un équivalent, pour tout $a \in]1, +\infty[$, de $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^a} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Comment peut-on obtenir cet équivalent directement ?

3. Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 35.

Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = \prod_{k=2}^n (2 - 3^{1/k})$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^{\ln(3)}}$.

Exercice 36.

X (PSI)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ sa somme partielle. On suppose

$$a_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

1. Montrer que $\sum a_n$ diverge et que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Montrer que $S_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} S_{n+2}$.
3. Montrer que $S_{n+1}^2 - S_{n+2}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2$.
4. Montrer que $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}$.
5. Réciproquement, montrer que si $b_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}$, $b_n \sum_{k=0}^n b_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 37⁺.

1. Déterminer toutes les fonctions $f \in C^0([0, 1])$ telles que $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f \in C^0([0, 1])$ telles que $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{3^n}$.

Exercice 38⁺.

1. Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une fonction injective. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^2}$ diverge.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^\alpha}$ diverge.

Exercice 39⁺⁺.

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs convergente telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrer que pour tout $S \in \left[0, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right]$, il existe un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_A(k) u_k$.